

УДК 531.8
ББК 22.21
О80

Авторы:

*А. В. Бобрышов, И.А. Орлянская,
С.Н. Капов, В. А. Лиханос, А.В. Орлянский*

Рецензент

доцент Н.П. Доронина

Особенности статического, кинематического и динамического
О80 расчета конструкций и механизмов / А. В. Бобрышов,
И.А. Орлянская, С.Н. Капов и др. ;
Ставропольский гос.аграрный ун-т. -Ставрополь: АГРУС, 2019. -44 с.

Пособие содержит задания для курсовых работ по статике, кинематике и динамике, в соответствии с программой изучения курса теоретической механики. Приведены общие требования к их выполнению, а также рассмотрены примеры выполнения заданий.

Предназначается для студентов по направлениям подготовки: 23.03.03 - "Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов"; 13.02.03 - "Электроэнергетика и электротехника"; 35.03.06 - "Агроинженерия".

УДК 531.8
ББК 22.21

Утверждено к изданию заседанием кафедры механики и компьютерной графики факультета механизации сельского хозяйства Ставропольского государственного аграрного университета (протокол №3 от 28 октября 2019 г.)

© ФГБОУ ВО Ставропольский государственный
аграрный университет, 2019

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Дисциплина «Теоретическая механика» – фундаментальная естественнонаучная дисциплина, лежащая в основе современной науки и техники. На материале теоретической механики базируются как общетехнические, так и специальные дисциплины, предметом изучения которых являются процессы, связанные с механическим движением и механическим взаимодействием твердых тел и сплошных сред.

Целью освоения дисциплины «Теоретическая механика» является:

- изучение общих законов, которым подчиняются движение и равновесие материальных тел и возникающие при этом взаимодействия между телами;

- формирование у студентов комплекса знаний, умений и навыков исследований с построением механико-математических моделей, адекватно отражающих изучаемые явления;

- формирование у студентов научного мировоззрения на основе знания объективных законов, действующих в материальном мире.

Задачами дисциплины являются:

- определение сил, возникающих при взаимодействии материальных тел, составляющих механическую систему (силовой расчет);

- определение характеристик движения тел и их точек в различных системах отсчета (кинематический расчет);

- определение законов движения материальных тел при действии сил (динамический расчет).

- навыками самостоятельно овладевать новой информацией в процессе производственной и научной деятельности, используя современные образовательные и информационные технологии.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать: – понятия и законы теоретической механики, роль дисциплины как теоретической базы естественнонаучных и прикладных дисциплин; – методы исследования систем сил, методы решения задач механики при условии равновесия тел и механических систем; – методы определения кинематических характеристик точки и тела при различных способах задания их движения; – методы и принципы исследования движения тел при действии сил.

Уметь: – формулировать решаемые задачи в понятиях теоретической механики; – разрабатывать механико-математические модели, адекватно отражающие основные свойства рассматриваемых явлений; – выполнять исследование математических моделей механических явлений с применением современных информационных технологий.

Владеть: – навыками исследования задач механики и построения механико-математических моделей, адекватно описывающих разнообразные механические явления; – навыками практического использования методов и принципов теоретической механики при решении задач: силового расчета, определения кинематических характеристик тел при различных способах задания движения, определения закона движения материальных тел и механических систем под действием сил; – навыками самостоятельно овладевать новой информацией в процессе производственной и научной деятельности, используя современные образовательные и информационные технологии.

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Государственным стандартом предусматривается, как правило, не менее 50% часов из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу студентов (СРС). В связи с этим, обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Одним из основных видов самостоятельной работы студентов является выполнение курсовых работ (проектов) в рамках дисциплины.

2. Содержание заданий, требования и порядок выполнения курсовой работы.

Курсовая работа содержит 9 заданий: 1.Определение реакций опор твердого тела; 2.Расчет плоской фермы; 3.Определение реакций опор составной конструкции; 4. Вращение тела вокруг неподвижной оси; 5. Кинематический расчет плоского механизма; 6.Сложное движение материальной точки 7,8.Общие теоремы динамики точки и механической системы; 9. Общее уравнение динамики(принцип Даламбера-Лагранжа).

Задания выполняются в расчетно-пояснительной записке на листах формата А4 (210 x 297) ГОСТ 2.301-68. Расчетно-пояснительная записка должна иметь титульный лист, исходные данные к каждому заданию, расчетную часть и список использованной литературы. Объем записки может составлять 20...25 страниц. Листы записки должны иметь основную надпись для текстовых и конструкторских документов по форме 2 и 2а ГОСТ 2. 104-68.

Решения заданий необходимо сопровождать пояснениями, какая формула или теорема используется, а также подробно описывать весь ход расчетов.

Рисунки, сопровождающие решения заданий, должны быть аккуратными, наглядными и выполняться с использованием чертежных инструментов.

Варианты заданий студентам выдаются преподавателем.

3. Контрольные задания.

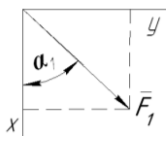
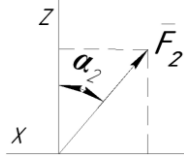
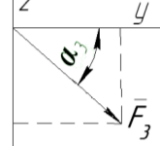
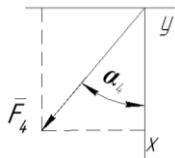
3.1. Задание №1. Определение реакций опор твердого тела.

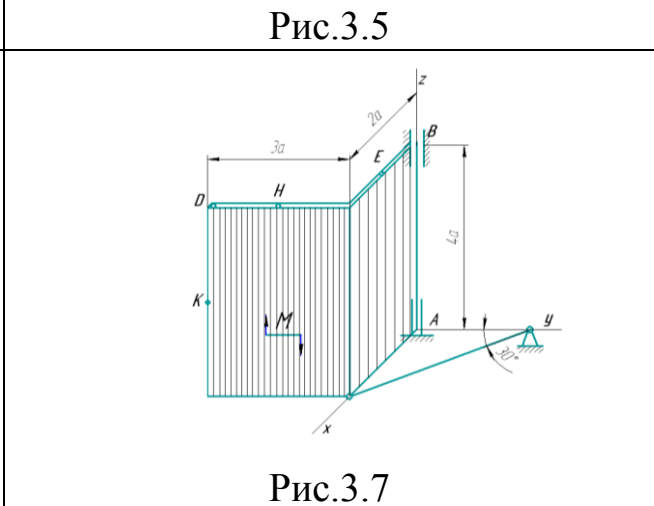
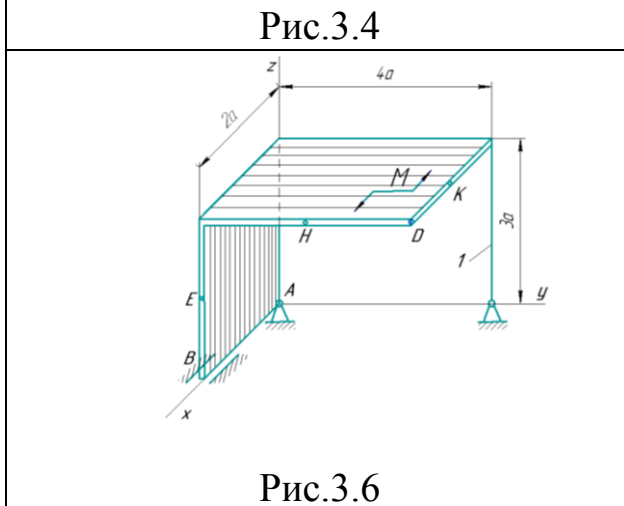
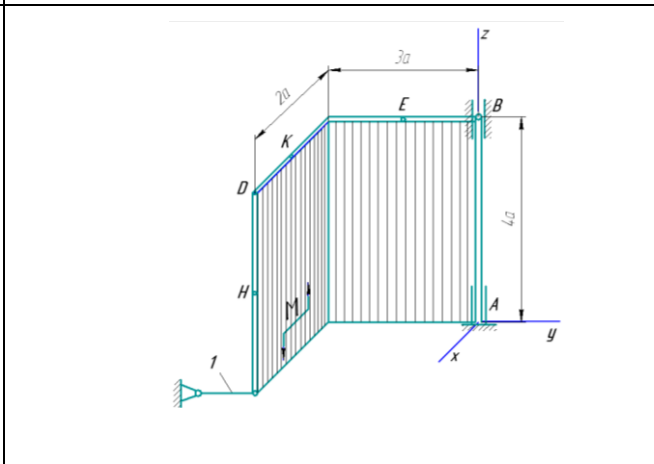
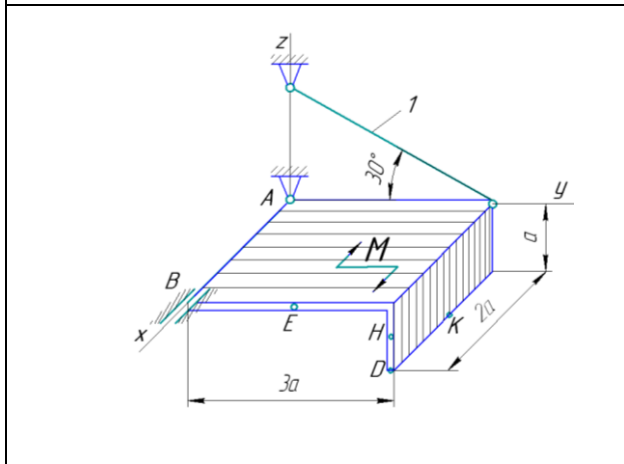
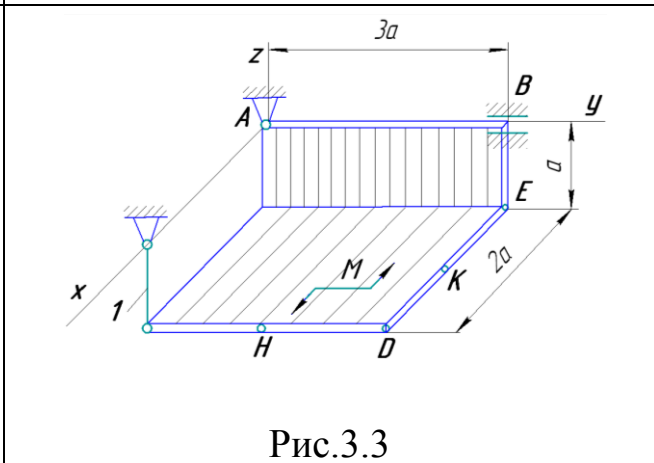
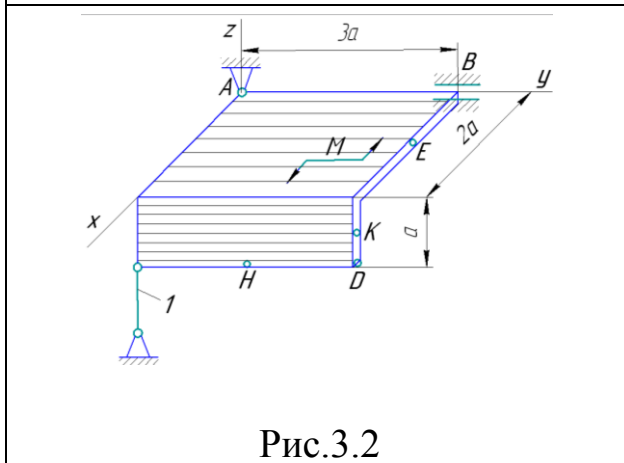
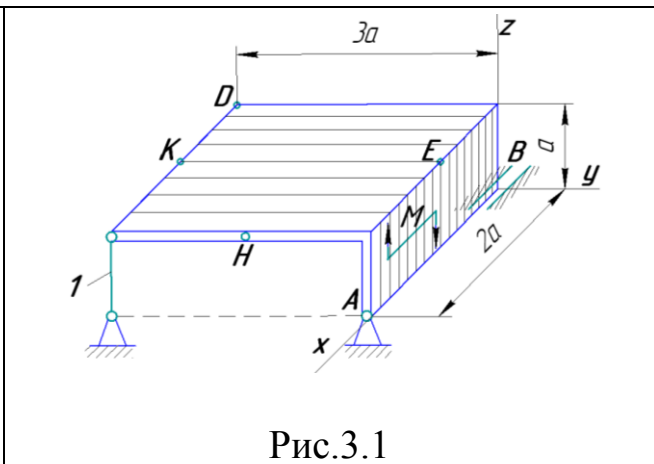
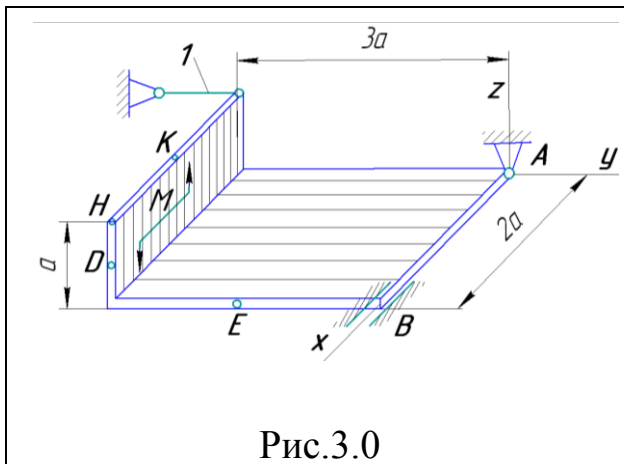
Найти реакции опор конструкции. Схемы конструкций состоят из двух однородных прямоугольных плит жестко соединенных под прямым углом друг к другу и показаны на рис. 3.0 – 3.9.

Размеры плит указаны на рисунках, вес большей плиты $G_1 = 5$ кН, вес меньшей плиты $G_2 = 3$ кН. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей.

На плиты действует пара сил с моментом $M = 4$ кН·м, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Значения этих сил, их направления и точка приложения заданы в табл. 1. Точки приложения сил (D , E , H , K) находятся в углах или в серединах сторон плит. При расчетах реакций связей принять $a = 0,6$ м.

Таблица.1

Силы								
	$F_1=6$ кН		$F_2=8$ кН		$F_3=10$ кН		$F_4=12$ кН	
Номер условия	Точка приложения	α_1 , град.	Точка приложения	α_1 , град.	Точка приложения	α_1 , град.	Точка приложения	α_1 , град.
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	E	60	H	30				
1			D	60	E	30		
2					K	60	E	30
1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	K	30			D	0		
4			E	30			D	60
5	H	0	K	60				
6			H	90	D	30		
7					H	60	K	90
8	D	30			K	0		
9			D	90			H	30



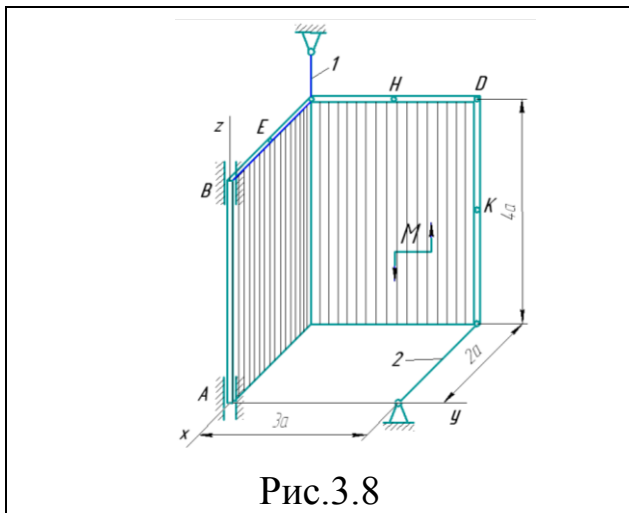


Рис.3.8

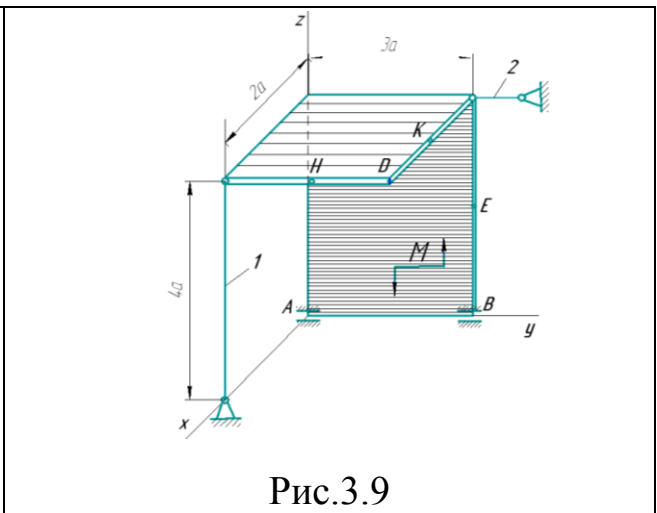


Рис.3.9

Пример выполнения задания №1.

Горизонтальная прямоугольная плита весом P (рис. С5) закреплена сферическим шарниром в точке A , цилиндрическим (подшипником) в точке B и невесомым стержнем DD' . На плиту в плоскости, параллельной xz , действует сила F , а в плоскости, параллельной yz , пара сил с моментом M .

Дано: $P=3$ кН, $F=8$ кН, $M=4$ кН·м, $\alpha = 60^\circ$, $AC=0,8$ м, $AB = 1,2$ м, $BE=0,4$ м, $EH= 0,4$ м. Определить: реакции опор A , B и стержня DD' .

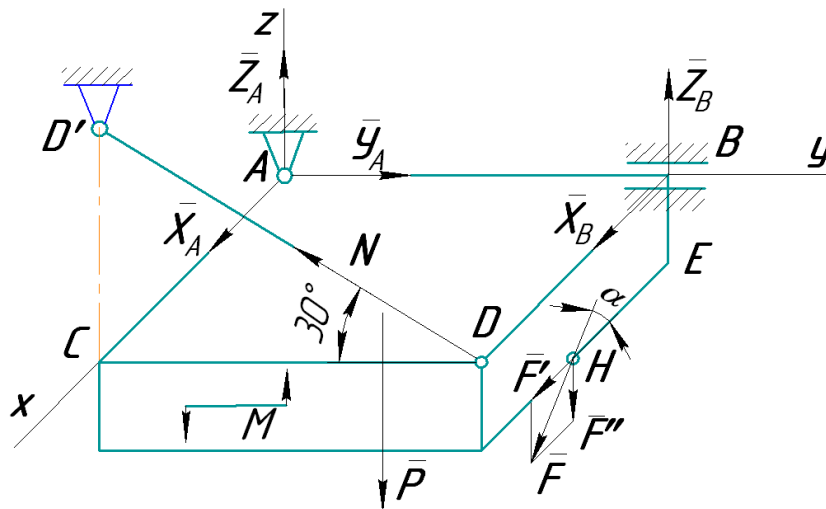


Рис.3.10

Решение.

1. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы P , F и пара с моментом M , а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие X_A , Y_A , Z_A , цилиндрического (подшипника) — на две составляющие X_B , Z_B (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию N стержня направим вдоль стержня от D к D' , предполагая, что он растянут (рис.3.10).

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\Sigma F_{kx}=0, \quad X_A+X_B+F \cdot \cos 60^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\Sigma F_{ky}=0, \quad Y_A - N \cdot \cos 30^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\Sigma F_{kz}=0, \quad Z_A + Z_B - P + N \cdot \sin 30^\circ - F \cdot \sin 60^\circ = 0; \quad (3)$$

$$\Sigma M_{kx} = 0, \quad M - P \cdot AB/2 + Z_B \cdot AB - F \cdot \sin 60^\circ \cdot AB + N \cdot \sin 30^\circ \cdot AB = 0; \quad (4)$$

$$\Sigma M_{ky} = 0, \quad P \cdot AC/2 - N \sin 30^\circ \cdot AC + F \cdot \sin 60^\circ \cdot AC/2 - F \cdot \cos 60^\circ \cdot BE = 0; \quad (5)$$

$$\Sigma M_{kz} = 0, \quad - F \cos 60^\circ \cdot AB - N \cdot \cos 30^\circ \cdot AC - X_B \cdot AB = 0. \quad (6)$$

Для определения моментов силы F относительно осей разлагаем ее на составляющие F' и F'' , параллельные осям x и z ($F' = F \cdot \cos \alpha$, $F'' = F \cdot \sin \alpha$), и применяем теорему Вариньона. Аналогично поступим при определении моментов реакции N .

Подставим в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин и решив эти уравнения, найдем искомые реакции.

Ответ: $X_A=3,4$ кН; $Y_A=5,1$ кН; $Z_A=4,8$ кН; $X_B= -7,4$ кН; $Z_B =2,1$ кН; $N=5,9$ кН. Знак минус указывает, что реакция X_B направлена противоположно показанной на рис. 3.10.

3.2. Задание №2. Расчет плоской фермы.

Определить реакции опор фермы и усилия во всех ее стержнях способом вырезания узлов, а в стержне 1 дополнительно способом Риттера. Схемы ферм показаны на рис. 4.0 – 4.9 . Необходимые для построения и расчета фермы данные представлены в табл.2.

Результаты аналитического расчета проверить для каждого узла путем построения силовых многоугольников.

Таблица 2.

Номер условия	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$F, Н$	300	400	500	500	150	120	300	500	350	450
$l, м$	2	3	4	3	2	5	3	2,5	2	3

ПРИМЕЧАНИЕ: В рисунках 4.4 и 4,5 длины всех стержней одинаковы.

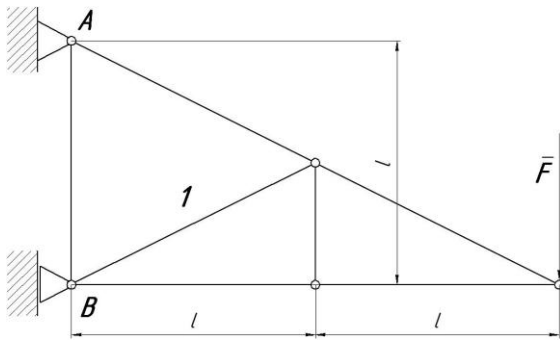


Рис.4.0

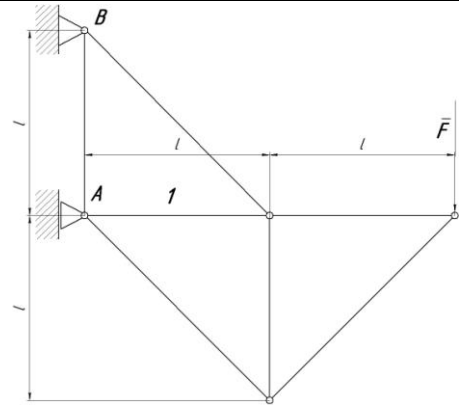


Рис.4.1

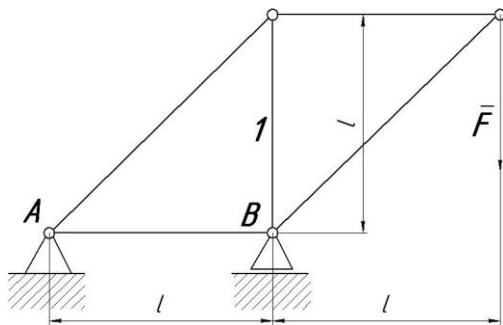


Рис.4.2

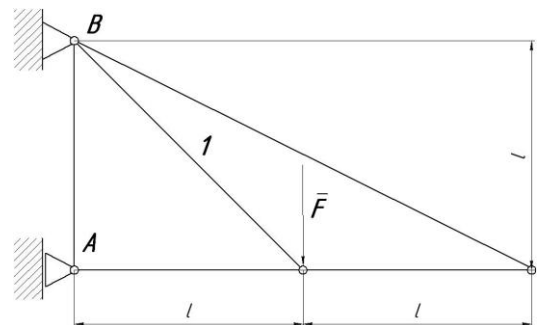


Рис.4.3

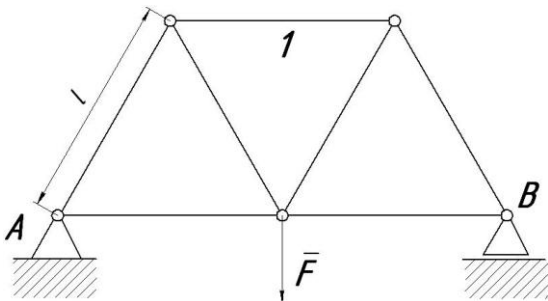


Рис.4.4

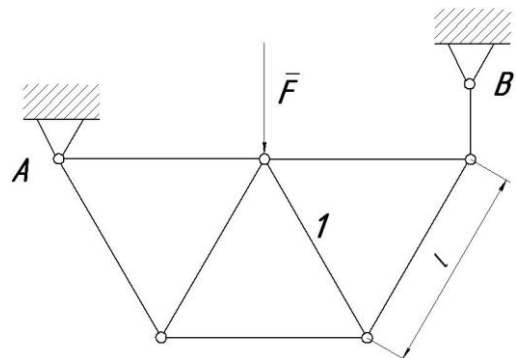


Рис.4.5

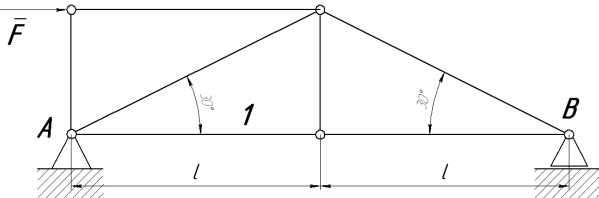


Рис.4.6

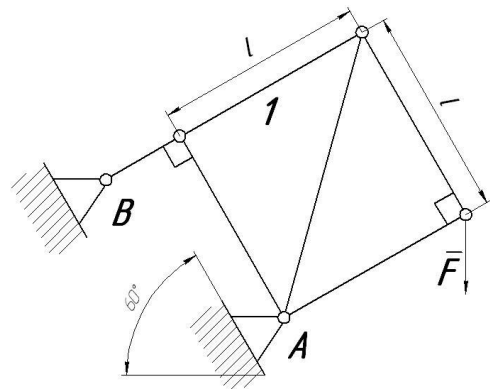


Рис.4.7

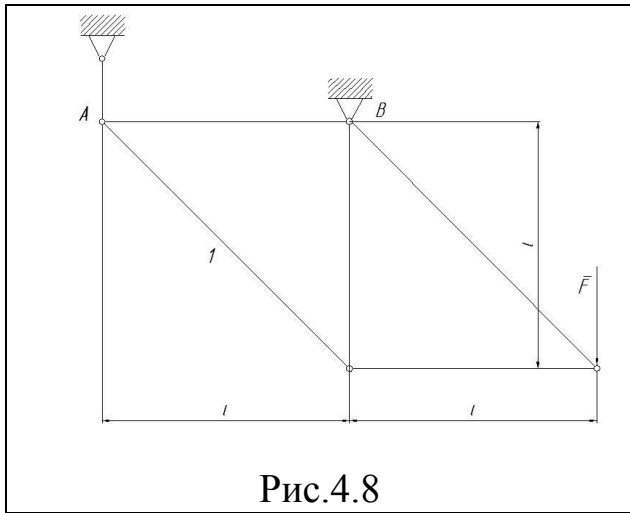


Рис.4.8

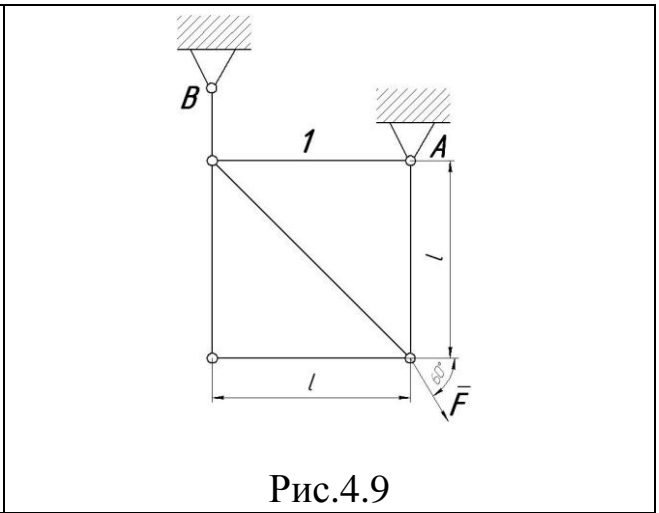


Рис.4.9

Пример выполнения задания №2.

Дано: $F = 200 \text{ Н}$; $l = 2 \text{ м}$.

Определить реакции опор фермы и усилия в ее стержнях (рис. 4.10).

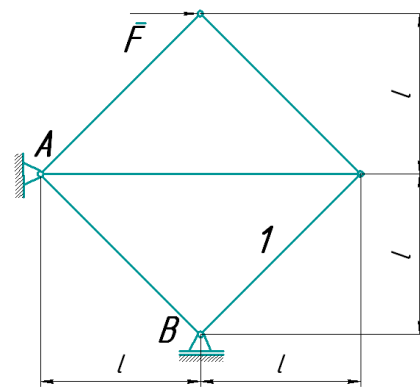


Рис. 4.10.

Решение.

1. Определение реакций опор.

Покажем внешние силы, приложенные к ферме: заданная сила F и реакции опор R_A , R_B . Так как направление реакции R_A неизвестно, поэтому разложим ее на составляющие X_A и Y_A . Реакция R_B будет направлена перпендикулярно опорной поверхности (рис. 4.11). Вычислим реакции опор из уравнений, описывающих условия равновесия системы сил, действующих на ферму.

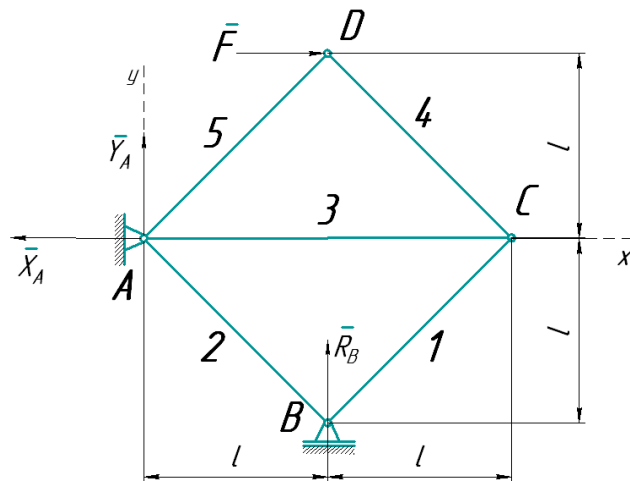


Рис. 4.11.

$$\Sigma F_{kx} = 0, \quad F - X_A = 0; \quad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = 0, \quad Y_A + R_B = 0; \quad (2)$$

$$\Sigma m_A (F_k) = 0, \quad R_B \cdot l - F \cdot l = 0, \quad (3)$$

откуда

$$F = X_A = 200 \text{ H};$$

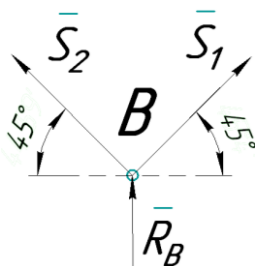
$$Y_A = -R_B = -200 \text{ H};$$

$$R_B = F = 200 \text{ H}$$

2. Определение усилий в стержнях фермы способом вырезания узлов.

Для определения усилий в стержнях фермы рассматриваем равновесие сил, приложенных к каждому ее узлу в такой последовательности, чтобы число неизвестных сил в нем не превышало двух. Считая, что стержни растянуты, направим реакции стержней от узлов к центру стержней. Отрицательный результат будет означать, что стержень сжат. Реакции каждого стержня обозначим S и S' , причем $S = -S'$.

Расчет начинаем с узла B . Составим два уравнения равновесия сил, приложенных к этому узлу:



$$\Sigma F_{kx} = 0, \quad -S_2 \cos 45^\circ + S_1 \cos 45^\circ = 0;$$

$$\Sigma F_{ky} = 0, \quad +S_7 + S_8 = 0,$$

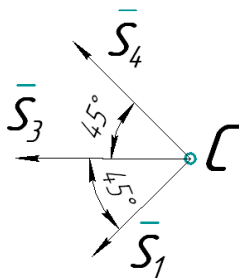
Решим уравнения и получим: $S_1 = S_2$,

$$S_1 = S_2 = -R_B/2 \sin 45^\circ = -200/2 \cdot 0,707 = -141,44 \text{ H};$$

Для проверки расчета строим в масштабе $\mu_s = 5 \text{ H/мм}$ силовой треугольник сил R_B , S_1 и S_2 (рис.4.13). Поскольку силовой треугольник сил получился замкнутым, то усилия S_1 и S_2 определены правильно.

Усилия в других стержнях фермы определяются аналогично.

Узел С.



$$\Sigma F_{kx} = 0, \quad -S_3 - S_1 \cos 45^\circ - S_4 \cos 45^\circ = 0;$$

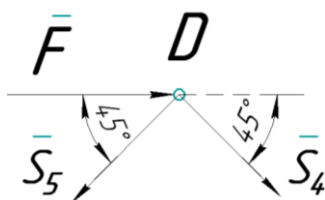
$$\Sigma F_{ky} = 0, \quad -S_1 \sin 45^\circ + S_4 \sin 45^\circ = 0;$$

$$S_4 = S_1 = -141,44 \text{ кН},$$

$$S_3 = -S_1 \cos 45^\circ - S_4 \cos 45^\circ = -2 \cdot 141,44 \cdot 0,707 = -200 \text{ H}.$$

Проведем графическую проверку (рис.4.13).

Узел D.



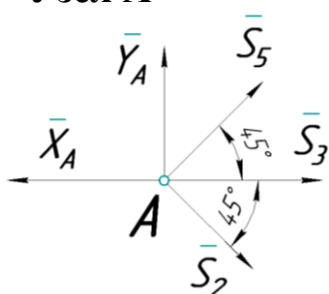
$$\Sigma F_{kx} = 0, \quad F - S_5 \cos 45^\circ + S_4 \cos 45^\circ = 0;$$

$$\Sigma F_{ky} = 0, \quad -S_5 \cos 45^\circ - S_4 \cos 45^\circ = 0,$$

$$S_5 = -S_4 = 141,44 \text{ H}.$$

Строим силовой многоугольник.

Узел А



$$\sum F_{kx} = 0, \quad -X_A + S_3 + S_2 \cos 45^\circ + S_5 \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A - S_2 \sin 45^\circ + S_5 \cos 45^\circ = 0.$$

В качестве проверки в одно из уравнений подставим численные значения найденных сил:

$$-200 + 141,44 \cdot 0,707 + 141,44 \cdot 0,707 = 0;$$

$$-200 + 199,99 = 0,$$

что удовлетворяет условиям равновесия приложенных к узлу сил, т.е. аналитические расчеты сил в стержнях фермы проведены правильно.

Таким образом, усилия во всех стержнях фермы определены. Значения найденных усилий в стержнях фермы сведем в таблицу 3.

3. Определение усилий в стержне 1 фермы способом сечений (Риттера).

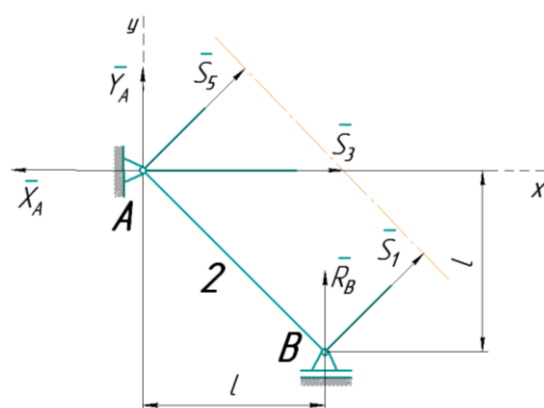


Рис.4.12

Рассечем ферму секущей плоскостью так, чтобы она прошла через стержни 1, 3, 5 и рассмотрим равновесие сил, приложенных к левой части фермы (рис.4.12).

Составляем уравнение равновесия:

$$\sum m_A (F_k) = 0, \quad R_B l + S_1 \cdot l / \sin 45^\circ = 0;$$

$$S_1 = -R_B \cdot \sin 45^\circ = -200 \cdot 0,707 = -141,44 \text{ Н.}$$

Таблица 3

Номер стержня	1	2	3	4	5
Знак усилия	-	-	-	-	+
Усилия, Н	141,44	141,44	200	141,44	141,44

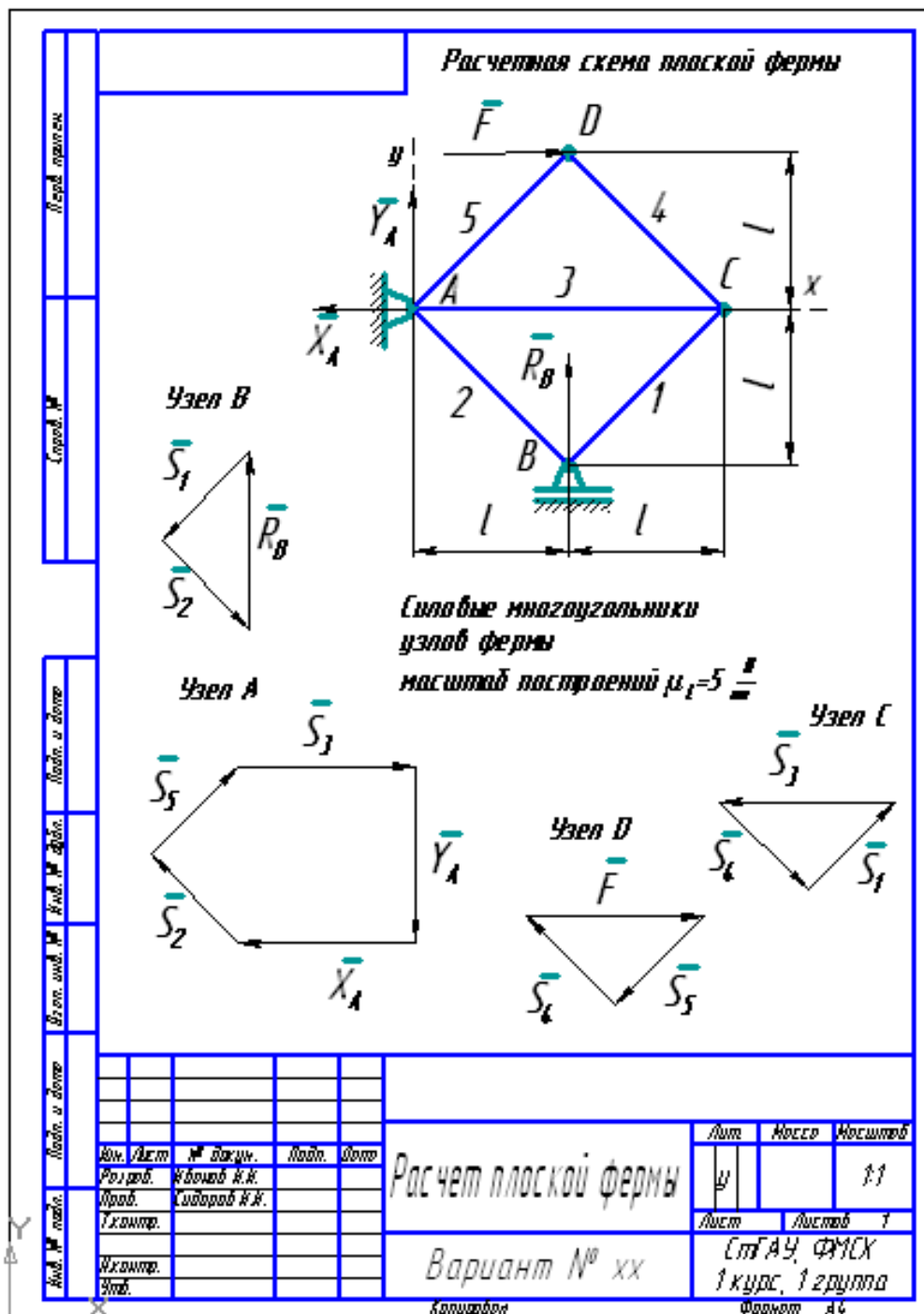


Рис.4.13.

3.3. Задания №3. Определение реакций опор составной конструкции.

Конструкция состоит из двух частей. Установить, при каком способе соединения двух частей конструкции модуль реакции, указанный на рис. 5.0 – 5.9, **НАИМЕНЬШИЙ**, и для этого варианта конструкции определить реакции опор и соединения С.

На рис. 5.0 – 5.9 показан первый способ соединения С – с помощью шарнира. Второй способ соединения – с помощью скользящей заделки, показан в табл. 5.

Таблица 4

Номер условия	F_1	F_2	M	q
	kH	kH	$kH\ m$	kH/m
0	5	7	24	1
1	6	10	22	12
2	7	9	20	14
3	8	7	18	16
4	9	6	16	18
5	10	8	25	2
6	11	7	20	2
7	12	6	15	22
8	13	9	17	3
9	14	8	20	2

Таблица 5

Номер рисунка	Вид скользящей заделки
0, 1, 2	
3	
4	
5, 6, 7	
8	
9	

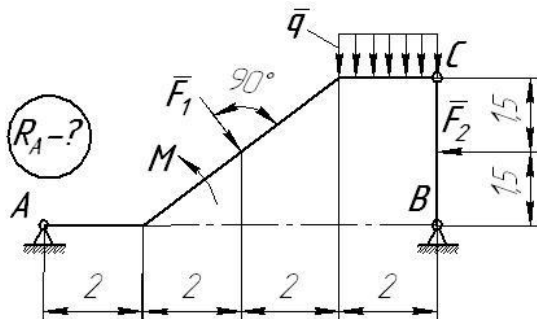


Рис.5.0

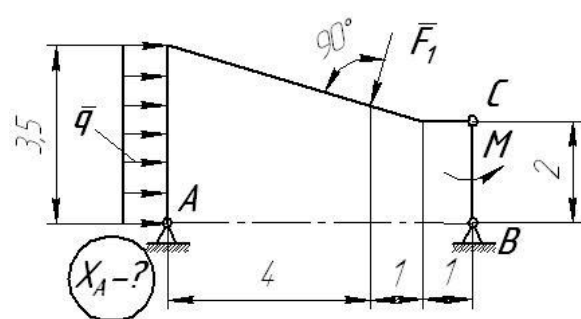


Рис.5.1

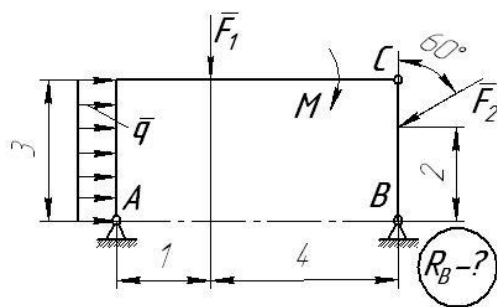


Рис.5.2

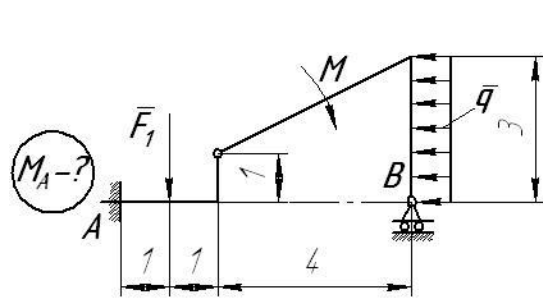


Рис.5.3

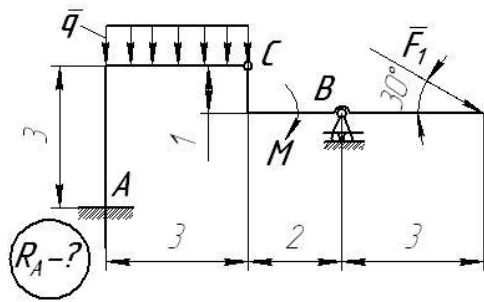


Рис.5.4

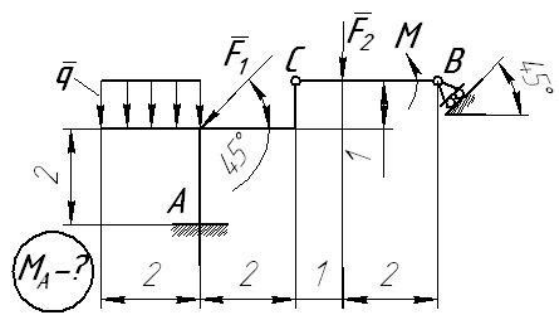


Рис.5.5

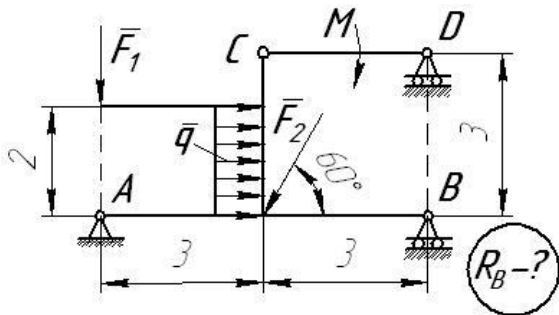


Рис.5.6

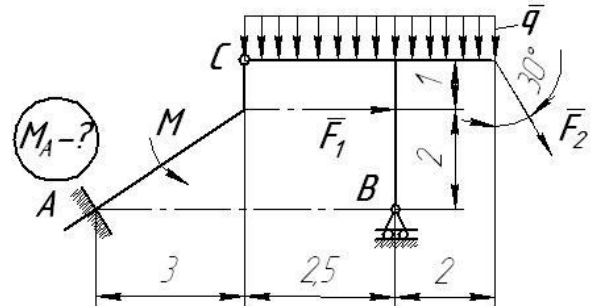


Рис.5.7

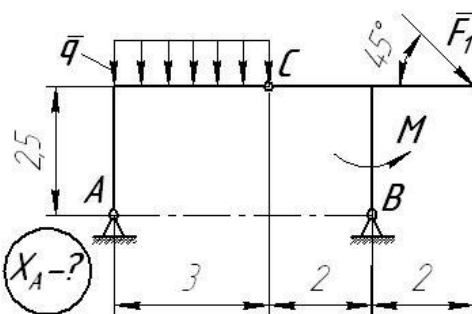


Рис.5.8

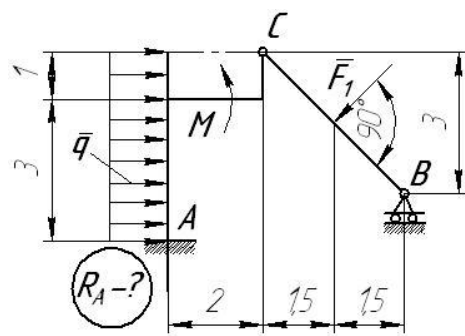


Рис.5.9

Пример выполнения задания №3.

Дано: $P_1 = 5 \text{ кН}$, $P_2 = 7 \text{ кН}$; $M = 22 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $q = 2 \text{ кН/м}$; $\alpha = 60^\circ$.

Определить внешние и внутренние реакции опор, для того способа соединения С (шарнир или скользящая заделка), при котором модуль реакции опоры А **наименьший**.

Решение.

1. Определение реакций опоры А при шарнирном соединении в точке С.

Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных ко всей конструкции (рис. 5.11). Составим уравнение моментов сил относительно точки В. Для упрощения вычисления момента силы P_1 разложим ее на вертикальную и горизонтальную составляющие:

$$F_1' = F_1 \cdot \cos 60^\circ = 2,5 \text{ кН};$$

$$F_1'' = F_1 \cdot \sin 60^\circ = 4,33 \text{ кН},$$

$$\sum M_{iB} = 0; \quad F_1' \cdot 3 + F_1'' \cdot 8 - Q \cdot 1 - Y_A \cdot 5 + X_A \cdot 1 - M + P_2 \cdot 1,8 = 0, \quad (1)$$

где $Q = q \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ кН}$.

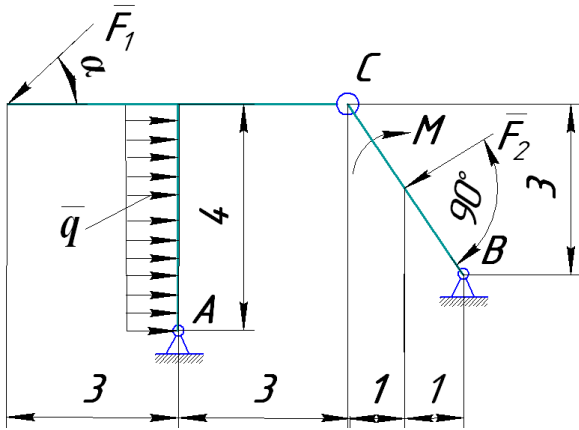


Рис.5.10

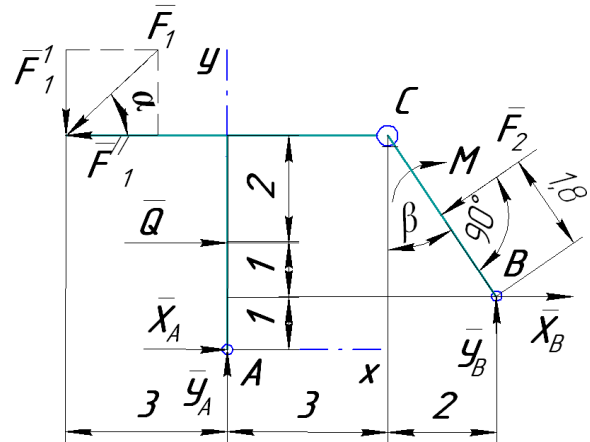


Рис.5.11

После подстановки данных и вычислений уравнение (1) получает вид:

$$X_A - 5 \cdot Y_A = -24,74 \text{ кН}. \quad (1^*)$$

Второе уравнение с неизвестными X_A и Y_A получим, рассмотрев систему уравнивающих сил, приложенных к части конструкции, расположенной левее шарнира С (рис.5.12):

$$\sum M_{iC} = 0; \quad F_1'' \cdot 6 + Q \cdot 2 - Y_A \cdot 3 + X_A \cdot 4 = 0,$$

и после вычислений

$$Y_A = -41,98 \text{ кН}. \quad (2^*)$$

Решая систему уравнений (1*) и (2*), находим:

$$X_A = -7,97 \text{ кН}, \quad Y_A = 3,36 \text{ кН}.$$

Модуль реакции опоры А при шарнирном соединении в точке С равен

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{7,97^2 + 3,36^2} = 8,65 \text{ кН}.$$

Расчетная схема при соединении частей конструкции в точке С скользящей заделкой показана на рис. 5.13.

Системы сил, показанные на рис. 5.11 и 5.13, ничем друг от не отличаются.

Поэтому уравнение (1*) остается в силе.

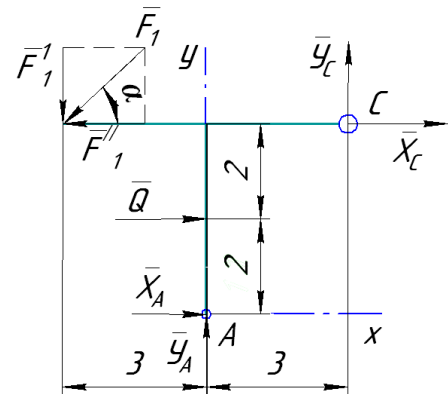


Рис.5.12

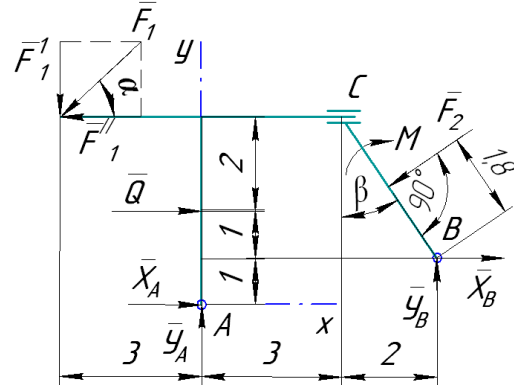


Рис.5.13

Для получения второго уравнения рассмотрим систему уравнивающих сил, приложенных к части конструкции, расположенной левее скользящей заделки С (рис. 5.14,а).

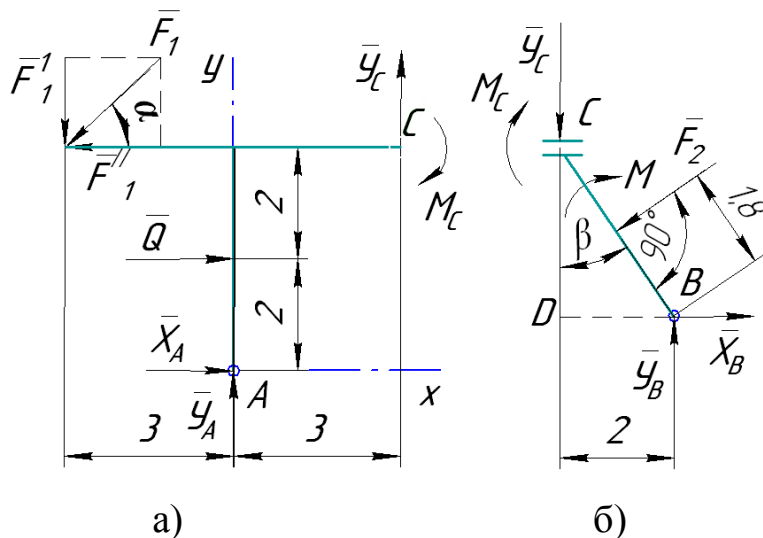


Рис.5.14

Составим уравнение равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + Q - F_1' = 0, \quad (3)$$

откуда

$$X_A = - 5,50 \text{ кН},$$

а из уравнения (1*) находим $Y_A = 3,85 \text{ кН}$.

Тогда, модуль реакции опоры А при скользящей заделке в С равен:

$$R_A^* = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{5,50^2 + 3,85^2} = 6,71 \text{ кН}$$

Итак, при соединении в точке С скользящей заделкой модуль реакции опоры А меньше, чем при шарнирном соединении (~ на 22%). Найдем составляющие реакции опоры В и скользящей заделки.

Для левой от С части (рис. 5.14,а)

$$\sum Y_i = 0; \quad - F_1'' + Y_A + Y_c = 0, \quad (4)$$

откуда

$$Y_c = F_1'' - Y_A = 0,48 \text{ кН}.$$

Составляющие реакции опоры В и момент в скользящей заделке найдем из уравнений равновесия, составленных для правой от С части конструкции (рис. 5.14,б):

$$\sum M_{iB} = 0; \quad M_c + Y_c \cdot 2 - M + F_2 \cdot 1,80 = 0, \quad (5)$$

$$\sum X_i = 0; \quad - F_2 \cdot \cos \beta + X_B = 0, \quad (6)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad - Y_c + Y_B - F_2 \cdot \sin \beta = 0. \quad (7)$$

Из прямоугольного треугольника BCD

$$\sin \beta = BD/BC = 2,0/\sqrt{2^2 + 3^2} = 2,0/3,61 = 0,555;$$

$$\cos \beta = CD/BC = 3,0/3,61 = 0,832.$$

Решая уравнения (5) - (7), найдем M_C , X_B , Y_B :

$$M_C = 8,44 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad X_B = 5,82 \text{ кН}; \quad Y_B = 4,37 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности проведённого решения, составим уравнение равновесия для сил, приложенных ко всей конструкции (см. рис. 2), которое ранее не использовалось.

Например:

$$\begin{aligned} \Sigma M_{iA} &= P' \cdot 4 + P'' \cdot 3 - Q \cdot 2 - M - P_2 \sin\beta \cdot 4 + P_2 \cos\beta \cdot 2,5 - X_B \cdot 1 + Y_B \cdot 5 = \\ &= 2,5 \cdot 4 + 4,33 \cdot 3 - 8 \cdot 2 - 22 - 7 \cdot 0,555 \cdot 4 + 7 \cdot 0,832 \cdot 2,5 - 5,82 \cdot 1 + 4,37 \cdot 5 = \\ &= 59,40 - 59,36 \sim 0. \end{aligned}$$

Результаты расчета сведем в таблицу 6.

Таблица 6

Вид соединения С	Силы, кН						Момент, кН·м
	X_A	Y_A	R_A	Y_C	X_B	Y_B	M_C
Для схемы на рис.5.11	-7,97	3,36	8,65	—	—	—	—
Для схемы на рис.5.13	-5,50	3,85	6,71	±0,48	5,82	4,37	±8,44

3.4.Задание 4. Вращение вокруг неподвижной оси.

В планетарном механизме (рис.6.1-6.6) шестерня I радиуса R_1 неподвижна, а кривошип OA , вращаясь вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, приводит в движение свободно насаженную на его конец A шестерню II радиуса R_2 . Для указанного на рисунке положения механизма найти скорости и ускорения точек A и B , если для соответствующего момента времени известны абсолютные величины угловой скорости и углового ускорения кривошипа (ω_{OA} , ε_{OA}). На рисунках условно показаны направления угловой скорости и углового ускорения дуговыми стрелками вокруг оси вращения. При этом направление угловой скорости соответствует направлению вращательного движения кривошипа. Угловое ускорение направлено в сторону угловой скорости при ускоренном вращении и в противоположную - при замедленном. Необходимые данные приведены в таблице 7.

Таблица 7.

№ варианта	№ рисунка	ω_{OA} , рад/с	ε_{OA} , рад/с ²	R_1 , м	R_2 , м	α , град.
1	2	3	4	5	6	7
1	6.1	1	9	0,5	0,1	0
2	6.2	1	8	0,6	0,1	30
3	6.3	2	7	0,7	0,2	60
4	6.4	2	6	0,8	0,2	90
5	6.5	2	3	0,6	0,1	60
6	6.6	3	5	0,7	0,2	120
7	6.1	3	5	0,9	0,3	120
8	6.2	3	4	0,5	0,5	150
9	6.3	4	3	0,6	0,4	180
10	6.4	4	2	0,7	0,4	210
11	6.5	2	4	0,7	0,2	90
12	6.6	3	6	0,7	0,2	150
13	6.1	5	1	0,8	0,5	240
14	6.2	1	1	0,5	0,1	0
15	6.3	2	2	0,5	0,2	30
16	6.4	3	1	0,6	0,3	60
17	6.5	4	7	0,8	0,3	180
18	6.6	5	9	0,8	0,3	240
19	6.1	4	2	0,6	0,4	90
20	6.2	5	1	0,7	0,5	120
21	6.3	6	2	0,7	0,1	150
22	6.4	7	1	0,8	0,2	180
23	6.5	4	8	0,8	0,3	210
24	6.6	1	1	0,5	0,1	0
25	6.1	8	2	0,8	0,3	210
26	6.2	9	1	0,9	0,4	240
27	6.3	1	1	0,6	0,1	0
28	6.4	1	2	0,6	0,1	30
29	6.5	1	2	0,6	0,2	30
30	6.6	2	3	0,6	0,3	60

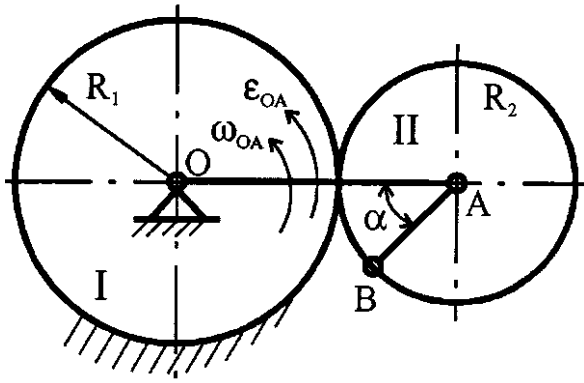


Рис.3.1

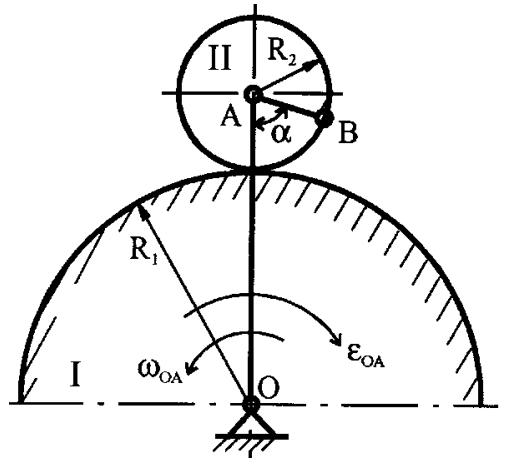


Рис.3.2

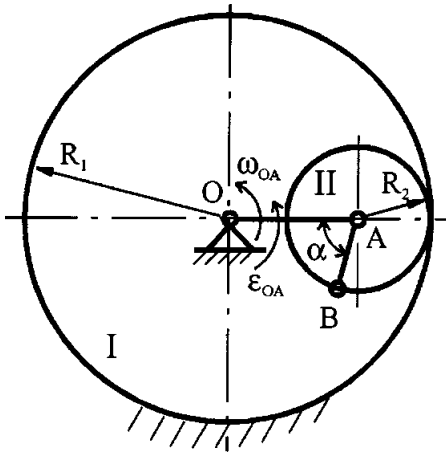


Рис.3.3

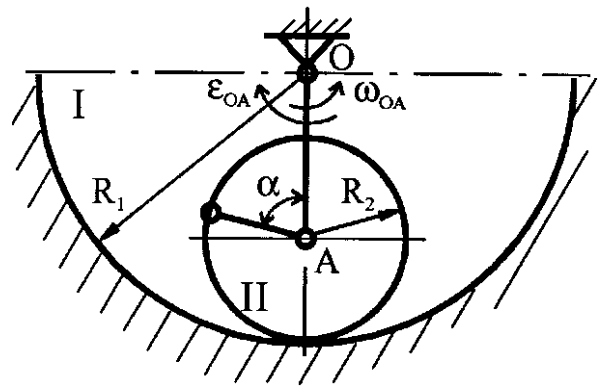


Рис.3.4

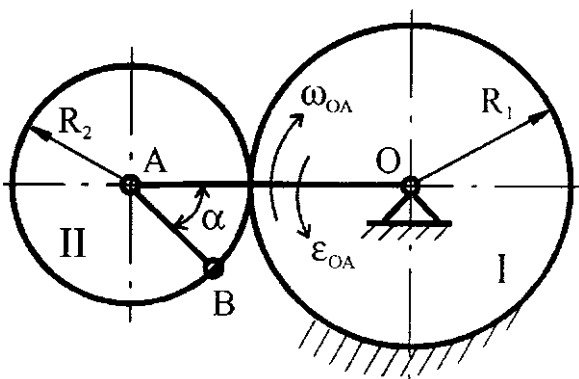


Рис.3.5

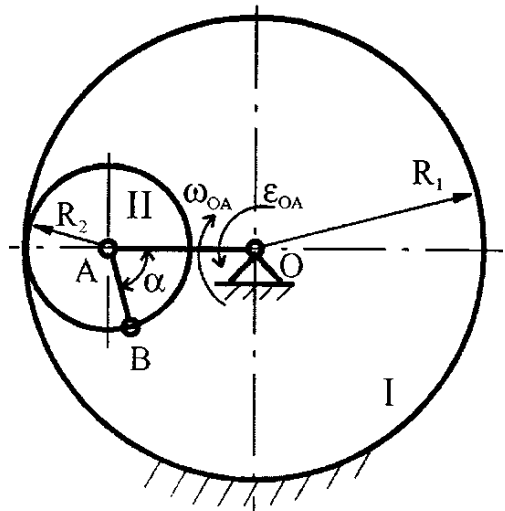


Рис.3.6

Пример выполнения задания №4.

Дано: кинематическая схема планетарного механизма (рис.6.7);
 $R_1=0,6$ м ; $R_2=0,4$ м ; $\omega_{OA} = 1$ рад/с ; $\varepsilon_{OA} = 1$ рад/с². Определить скорости и ускорения точек A и B , показанных на рисунке, если $\alpha = 60^\circ$.

Решение.

Рассмотрим последовательно движения каждого из двух подвижных звеньев планетарного механизма. Начнем со звена, угловая скорость и угловое ускорение которого заданы, т.е. исследование кинематики механизма начинаем с кривошипа.

1. Кривошип OA совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка. Определим скорость и ускорение точки A кривошипа, которая одновременно принадлежит и подвижной шестерне II .

Абсолютная величина скорости точки A (V_A) определяется по формуле

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = \omega_{OA} \cdot (R_1 + R_2). \quad (1)$$

С учетом исходных данных для заданного положения механизма

$$V_A = 1 \cdot (0,6 + 0,4) = 1 \text{ м/с}. \quad (2)$$

Вектор скорости V_A направлен перпендикулярно OA (радиусу вращения) в направлении вращения, указанному на рис.3.7 дуговой стрелкой ω_{OA} .

Ускорение точки A найдем как сумму касательной и нормальной составляющих

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau. \quad (3)$$

Величины нормального (\bar{a}_A^n) и касательного (\bar{a}_A^τ) ускорений определяются соответственно по формулам:

$$\bar{a}_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = \omega_{OA}^2 \cdot (R_1 + R_2), \quad (4)$$

$$\bar{a}_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = \varepsilon_{OA} \cdot (R_1 + R_2), \quad (5)$$

Для заданного положения механизма

$$\bar{a}_A^n = 1^2 \cdot (0,6 + 0,4) = 1 \text{ м/с}^2. \quad (6)$$

$$\bar{a}_A^\tau = 1 \cdot (0,6 + 0,4) = 1 \text{ м/с}^2. \quad (7)$$

При этом нормальное ускорение точки A (\bar{a}_A^n) направлено по радиусу окружности, описываемой точкой к центру этой окружности – к точке O .

Касательное ускорение (\bar{a}_A^τ) направлено по касательной к этой окружности (перпендикулярно OA) в сторону, указанную дуговой стрелкой ε_{OA} . Это объясняется тем, что при замедленном вращении (по

условию задачи кривошип OA вращается замедленно) касательное ускорение направляется в сторону, противоположную направлению вращения, указанного дуговой стрелкой ω_{OA} . В то же время при замедленном вращении угловое ускорение направляется также в сторону, противоположную направлению угловой скорости.

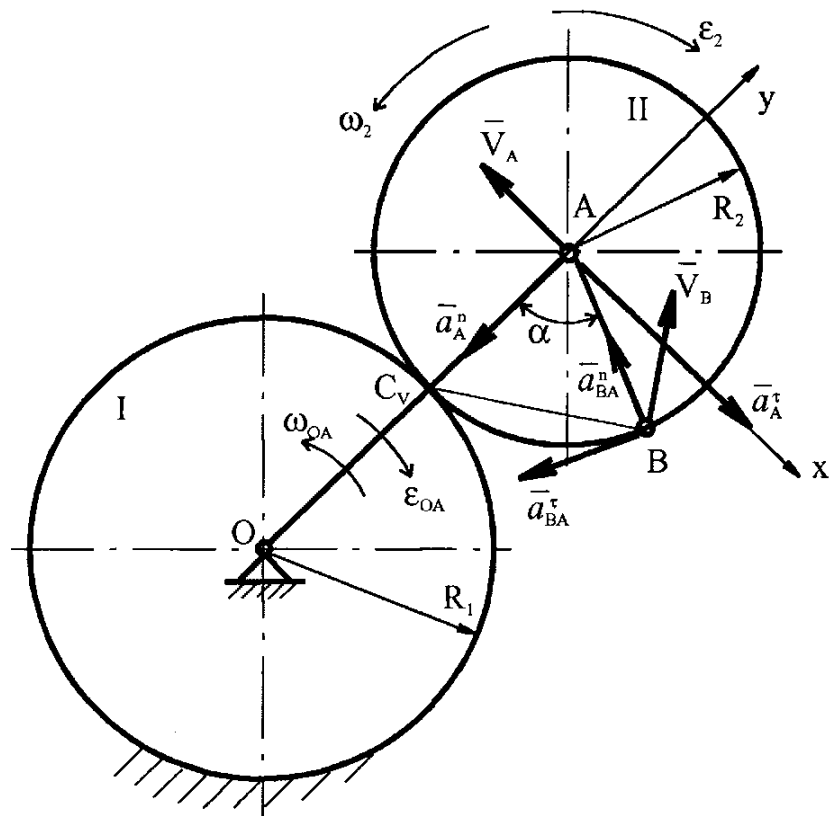


Рис.6.7

Величина ускорения точки A в соответствии с соотношением (3) и с учетом (6) и (7) для заданного положения механизма определится по формуле:

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ м/с}^2.$$

2. Шестерня II совершает плоскопараллельное (плоское) движение. Учитывая, что шестерня II катится без скольжения по неподвижной шестерне I, мгновенный центр скоростей (точка C_V) подвижной шестерни будет находиться в точке соприкосновения двух шестерен (рис.3.7).

Для заданного положения планетарного механизма скорость центра шестерни II (точки A) определена. Таким образом, зная величину скорости одной из точек и положение мгновенного центра скоростей подвижной шестерни, можно определить величину ее мгновенной угловой скорости (ω_2) по формуле

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AC_V}, \quad (7)$$

где расстояние $AC_V = R_2$.

Подставим значения $AC_V = R_2$ и V_A из формулы (1) в соотношение (7) получим

$$\omega_2 = \frac{\omega_{OA} \cdot (R_1 + R_2)}{R_2}. \quad (8)$$

Для заданного положения механизма

$$\omega_2 = \frac{1 \cdot (0,6 + 0,4)}{0,4} = 2,5 \text{ рад / с}. \quad (9)$$

Направление мгновенного вращения шестерни II вокруг мгновенного центра скоростей (точки C_V), определяемое направлением скорости точки A (V_A), условно показано на рис.6.7 дуговой стрелкой (ω_2).

Шестерня II в указанном положении движется замедленно. Это следует из сопоставления направлений векторов V_A и a_A (они направлены в противоположные стороны). Следовательно угловое ускорение шестерни II (ε_2) направлено в сторону, противоположную направлению угловой скорости ω_2 , что условно показано на рис.6.7 дуговой стрелкой ε_2 .

Величину углового ускорения ε_2 определим по формуле

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt}. \quad (10)$$

Учитывая выражение (8), получим

$$\omega_2 = \frac{d\omega_{OA}}{dt} \cdot \frac{(R_1 + R_2)}{R_2} = \frac{\varepsilon_{OA} \cdot (R_1 + R_2)}{R_2}. \quad (11)$$

где ε_{OA} - величина углового ускорения кривошипа OA . Для заданного положения механизма

$$\varepsilon_2 = \frac{1 \cdot (0,6 + 0,4)}{0,4} \text{ рад / с}^2. \quad (12)$$

Таким образом, для некоторого момента времени найдены положение мгновенного центра скоростей, угловая скорость, угловое ускорение подвижной шестерни II, а также ускорение точки A . Это позволяет найти скорость и ускорение любой точки шестерни.

Определим абсолютную величину скорости точки B (V_B) по формуле

$$V_B = \omega_2 \cdot BC_V, \quad (13)$$

где BC_V - расстояние от точки B до мгновенного центра скоростей.

Расстояние BC_V определим из треугольника ABC_V . Этот треугольник равносторонний и, следовательно,

$$BC_V = R_2 = 0,4 \text{ м}. \quad (14)$$

Для заданного положения механизма, учитывая выражения (9) и (14), на основании (13) получим

$$V_B = 2,5 \cdot 0,4 = 1 \text{ м/с} . \quad (15)$$

Вектор скорости V_B направлен перпендикулярно прямой BC_V
Ускорение точки B можно найти на основании теоремы об ускорениях точек плоской фигуры, приняв точку A за полюс

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau , \quad (16)$$

где \bar{a}_{BA}^n и \bar{a}_{BA}^τ - соответственно нормальное и касательное ускорения точки B при относительном вращательном движении шестерни II вокруг полюса A . Учитывая формулу (3), преобразуем выражение (16) в вид

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau . \quad (17)$$

Величины нормального (\bar{a}_{BA}^n) и касательного (\bar{a}_{BA}^τ) ускорений точки B при относительном вращательном движении шестерни II вокруг полюса A определяются по формулам

$$\bar{a}_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot BA = \omega_2^2 \cdot R_2 , \quad (18)$$

$$\bar{a}_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BA = \varepsilon_2 \cdot R_2 . \quad (19)$$

Для заданного положения механизма на основании формул (18) и (19) с учетом (9) и (12) получим

$$\bar{a}_{BA}^n = 2,5^2 \cdot 0,4 = 2,5 \text{ м/с}^2 , \quad (20)$$

$$\bar{a}_{BA}^\tau = 2,5 \cdot 0,4 = 1 \text{ м/с}^2 . \quad (21)$$

При этом нормальное ускорение \bar{a}_{BA}^n направлено вдоль BA к центру относительного вращения (к полюсу A), а касательное ускорение \bar{a}_{BA}^τ направлено перпендикулярно прямой AB в сторону, указанную дуговой стрелкой ε_2 .

Таким образом, найдены модули четырех векторов ускорений, стоящих в правой части векторного равенства (17), и показаны их направления в точке B на рис.6.7. Найдем ускорение точки B как геометрическую сумму четырех показанных в точке ускорений аналитическим способом. Для этого спроектируем векторы, стоящие в правой и левой части равенства (17), на две оси координат x, y (рис.6.7)

$$a_{Bx} = a_A^\tau - \bar{a}_{BA}^n \cdot \cos 30^\circ - a_{BA}^\tau \cdot \cos 60^\circ , \quad (22)$$

$$a_{By} = -a_A^n + \bar{a}_{BA}^n \cdot \cos 60^\circ - a_{BA}^\tau \cdot \cos 30^\circ . \quad (23)$$

Учитывая формулы (6), (7), (20) и (21), на основании (22) и (23) найдем для заданного положения механизма значения проекций ускорения точки B на оси x, y

$$a_{Bx} = 1 - 2,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = -1,665 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{By} = -1 + 2,5 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,616 \text{ м/с}^2,$$

Проекции вектора ускорения a_B (лежащего в плоскости $xу$) на две оси координат полностью определяют его модуль и направление. Тогда, величина равна

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{1,665^2 + 0,616^2} = 1,775 \text{ м/с}^2,$$

Ответ: $V_A=1 \text{ м/с}$; $a_A=1,42 \text{ м/с}^2$; $V_B=1 \text{ м/с}$; $a_B=1,775 \text{ м/с}^2$.

3.5. Задания №5. Плоское движение твердого тела.

Определить для заданного положения механизма скорости и ускорения его точек A , B и C , угловые скорости и угловые ускорения его звеньев, приняв угловую скорость ω кривошипа AB постоянной. Схемы механизмов показаны на рис.7.1. Необходимые для расчета данные и размеры звеньев механизма приведены в таблице 8.

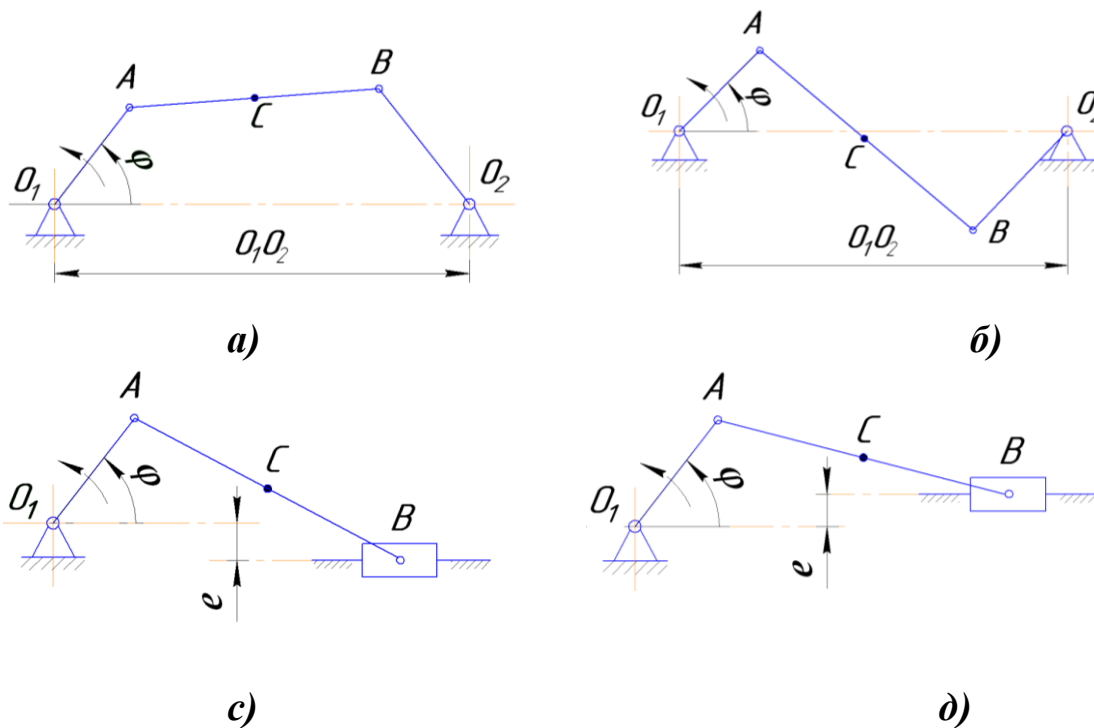


Рис.7.1.

Таблица 8.

Вариант	$\omega, \text{с}^{-1}$	$\varphi, \text{град.}$	$l_{O_1A}, \text{м}$	$O_1O_2, \text{м}$	$l_{AB}, \text{м}$	$l_{O_2B}, \text{м}$	$l_{AC}, \text{м}$	$e, \text{м}$	№ рисунка
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	135°	0,025	0,085	0,116	0,03	0,058	-	рис.7.1.а
2	5	135°	0,025	0,085	0,116	0,03	0,045	-	рис.7.1.а
3	3	180°	0,025	0,085	0,096	0,03	0,048	-	рис.7.1.а
4	6	180°	0,025	0,085	0,130	0,03	0,065	-	рис.7.1.а
5	7	225°	0,025	0,085	0,090	0,03	0,045	-	рис.7.1.а
6	8	225°	0,025	0,085	0,130	0,03	0,065	-	рис.7.1.а
7	4	270°	0,025	0,085	0,116	0,03	0,058	-	рис.7.1.а
8	5	270°	0,025	0,085	0,076	0,03	0,038	-	рис.7.1.а
9	7	315°	0,025	0,085	0,060	0,03	0,030	-	рис.7.1.а
10	9	315°	0,025	0,085	0,096	0,03	0,048	-	рис.7.1.а
11	7	30°	0,025	0,085	0,050	0,03	0,025	-	рис.7.1.а
12	8	30°	0,025	0,085	0,084	0,03	0,042	-	рис.7.1.а
13	6	45°	0,025	0,085	0,050	0,03	0,025	-	рис.7.1.а
14	5	45°	0,025	0,085	0,080	0,03	0,040	-	рис.7.1.а
15	10	60°	0,025	0,085	0,060	0,03	0,030	-	рис.7.1.а
16	4	60°	0,025	0,085	0,096	0,03	0,048	-	рис.7.1.а
17	3	90°	0,025	0,085	0,060	0,03	0,030	-	рис.7.1.а
18	2,5	90°	0,025	0,085	0,10	0,03	0,050	-	рис.7.1.а
19	8	90°	0,025	0,085	0,080	0,03	0,040	-	рис.7.1.б
20	4	90°	0,025	0,085	0,114	0,03	0,057	-	рис.7.1.б
21	8	60°	0,025	0,085	0,07	0,03	0,035	-	рис.7.1.б
22	2	60°	0,025	0,085	0,10	0,03	0,05	-	рис.7.1.б
23	5	45°	0,025	0,085	0,09	0,03	0,045	-	рис.7.1.б
24	6	45°	0,025	0,085	0,06	0,03	0,03	-	рис.7.1.б
25	11	30°	0,025	0,085	0,064	0,03	0,032	-	рис.7.1.б
26	10	30°	0,025	0,085	0,046	0,03	0,023	-	рис.7.1.б
27	12	30°	0,025	0,085	0,092	0,03	0,046	-	рис.7.1.б
28	4	135°	0,025	0,085	0,08	0,03	0,04	-	рис.7.1.б
29	6	135°	0,025	0,085	0,13	0,03	0,065	-	рис.7.1.б
30	2	180°	0,025	0,085	0,136	0,03	0,068	-	рис.7.1.б
31	9	180°	0,025	0,085	0,09	0,03	0,045	-	рис.7.1.б
32	1,5	225°	0,025	0,085	0,08	0,03	0,04	-	рис.7.1.б
33	4	225°	0,025	0,085	0,08	0,03	0,04	-	рис.7.1.б
34	6	270°	0,025	0,085	0,126	0,03	0,063	-	рис.7.1.б

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
35	7	270°	0,025	0,085	0,06	0,03	0,03	-	<i>пуч.7.1.б</i>
36	5	315°	0,025	0,085	0,05	0,03	0,025	-	<i>пуч.7.1.б</i>
37	7	315°	0,025	0,085	0,086	0,03	0,043	-	<i>пуч.7.1.б</i>
38	6	30°	0,03	-	0,1	-	0,05	-0,01	<i>пуч.7.1.с</i>
39	7	45°	0,03	-	0,07	-	0,035	-0,01	<i>пуч.7.1.с</i>
40	9	45°	0,03	-	0,11	-	0,055	-0,01	<i>пуч.7.1.с</i>
41	5	90°	0,03	-	0,08	-	0,04	-0,01	<i>пуч.7.1.с</i>
42	4	90°	0,03	-	0,12	-	0,06	-0,01	<i>пуч.7.1.с</i>
43	2	120°	0,03	-	0,09	-	0,045	-0,01	<i>пуч.7.1.с</i>
44	7	120°	0,03	-	0,13	-	0,065	-0,01	<i>пуч.7.1.с</i>
45	9	135°	0,03	-	0,08	-	0,04	-0,01	<i>пуч.7.1.с</i>
46	11	135°	0,03	-	0,1	-	0,05	-0,01	<i>пуч.7.1.с</i>
47	5	150°	0,03	-	0,11	-	0,055	-0,01	<i>пуч.7.1.с</i>
48	6	150°	0,03	-	0,13	-	0,065	-0,01	<i>пуч.7.1.с</i>
49	2,5	225°	0,03	-	0,09	-	0,045	-0,01	<i>пуч.7.1.с</i>
50	9	225°	0,03	-	0,12	-	0,06	-0,01	<i>пуч.7.1.с</i>
51	4	240°	0,03	-	0,09	-	0,045	-0,01	<i>пуч.7.1.с</i>
52	6	240°	0,03	-	0,11	-	0,055	-0,01	<i>пуч.7.1.с</i>
53	7	270°	0,03	-	0,05	-	0,025	-0,01	<i>пуч.7.1.с</i>
54	5	270°	0,03	-	0,07	-	0,035	-0,01	<i>пуч.7.1.с</i>
55	6	315°	0,03	-	0,06	-	0,03	-0,01	<i>пуч.7.1.с</i>
56	8	315°	0,03	-	0,09	-	0,045	-0,01	<i>пуч.7.1.с</i>
57	3	315°	0,03	-	0,06	-	0,03	+0,01	<i>пуч.7.1.д</i>
58	3	315°	0,03	-	0,046	-	0,023	+0,01	<i>пуч.7.1.д</i>
59	4	270°	0,03	-	0,08	-	0,04	+0,01	<i>пуч.7.1.д</i>
60	5	270°	0,03	-	0,1	-	0,05	+0,01	<i>пуч.7.1.д</i>
61	5	225°	0,03	-	0,074	-	0,037	+0,01	<i>пуч.7.1.д</i>
62	9	225°	0,03	-	0,104	-	0,052	+0,01	<i>пуч.7.1.д</i>
63	7	180°	0,03	-	0,086	-	0,043	+0,01	<i>пуч.7.1.д</i>
64	6	180°	0,03	-	0,07	-	0,035	+0,01	<i>пуч.7.1.д</i>
65	3	180°	0,03	-	0,08	-	0,04	+0,01	<i>пуч.7.1.д</i>
66	2	135°	0,03	-	0,1	-	0,05	+0,01	<i>пуч.7.1.д</i>
67	8	90°	0,03	-	0,05	-	0,025	+0,01	<i>пуч.7.1.д</i>
68	7	90°	0,03	-	0,07	-	0,035	+0,01	<i>пуч.7.1.д</i>
69	6	45°	0,03	-	0,08	-	0,04	+0,01	<i>пуч.7.1.д</i>
70	9	45°	0,03	-	0,104	-	0,052	+0,01	<i>пуч.7.1.д</i>
71	2	60°	0,03	-	0,05	-	0,025	+0,01	<i>пуч.7.1.д</i>
72	5	60°	0,03	-	0,08	-	0,04	+0,01	<i>пуч.7.1.д</i>

Пример выполнения задания №5.

Определить для заданного положения механизма скорости и ускорения его точек, угловые скорости и угловые ускорения его звеньев, приняв угловую скорость кривошипа АВ постоянной.

Необходимые для расчета данные и размеры звеньев механизма приведены в исходных данных.

Дано: $\varphi=45^\circ$, $\omega=2 \text{ с}^{-1}$, $l_{O_1A}=0,02 \text{ м}$, $l_{AC}=0,035 \text{ м}$, $l_{AB}=0,07 \text{ м}$, $e = - 0,01 \text{ м}$.

Определить: 1) скорости и ускорения точек В, С механизма;

2) угловую скорость и ускорение звена АВ механизма.

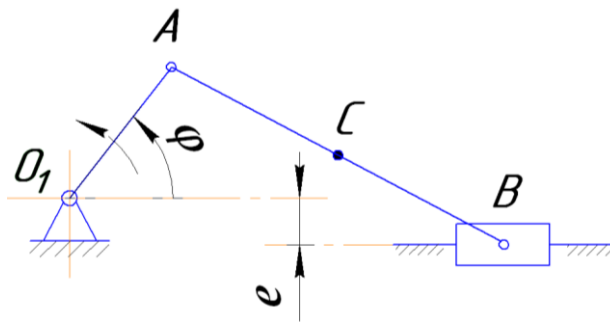


Рис. 7.2.

Решение.

1. Построение кинематической схемы проведем в масштабе

$$\mu_l = 0,001 \text{ м/мм.}$$

Для этого длины звеньев механизма, координаты неподвижных шарниров и направляющей поршня пересчитаем в соответствии с выбранным масштабом:

$$O_1A = 20 \text{ мм}; AB = 70 \text{ мм}; AC = 35 \text{ мм}; e = -10 \text{ мм.}$$

По полученным размерам строим кинематическую схему методом засечек для заданного положения ведущего звена (рис.7.3).

2. Определим скорости точек механизма и угловые скорости звеньев механизма.

Скорость точки А, вращающейся с постоянной скоростью вокруг точки O_1 , направлена перпендикулярно звену O_1A и по модулю равна:

$$V_A = \omega \cdot l_{AB} = 2 \cdot 0,02 = 0,04 \text{ м/с.}$$

Для построения скоростей выбираем масштаб плана скоростей:

$$\mu_v = \frac{V_A}{\rho_a} = \frac{0,04}{80} = 0,0005 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$$

Составим векторное уравнение сложения скоростей при плоскопараллельном движении

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA},$$

где V_B – скорость точки В;

V_A – скорость точки А, направленная перпендикулярно $O_1 A$ в соответствии с направлением угловой скорости ω_1 звена $O_1 A$;

V_{BA} – скорость точки В во вращении звена АВ относительно точки А, по модулю неизвестна и направлена перпендикулярно АВ.

Проведем построения: от полюса плана скоростей p откладываем отрезок (pa) , изображающий скорость V_A , и через его конец «а» проводим направление скорости V_{BA} до пересечения с направлением скорости V_B в точке b . Отрезок (pb) изображает скорость V_B (рис.7.3).

Скорость точки С найдем, по правилу подобия.

$$\frac{l_{AB}}{l_{AC}} = \frac{ab}{ac},$$

Найдем истинные значения найденных скоростей, умножив соответствующие вектора на масштаб:

$$V_B = (pb) \mu_V = 74,5 \cdot 0,0005 = 0,037 \text{ м/с};$$

$$V_{BA} = (ab) \mu_V = 59,3 \cdot 0,0005 = 0,03 \text{ м/с},$$

$$V_C = (pc) \mu_V = 71,4 \cdot 0,0005 = 0,036 \text{ м/с}.$$

Найдем значения угловых скоростей звеньев механизма.

$$\omega = \frac{V_{BA}}{l_{AB}} = \frac{0,03}{0,07} = 0,43 \text{ с}^{-1}$$

Направление угловой скорости звена АВ механизма находим по вектору скорости, определяющего его численное значение.

3. Определим ускорения точек механизма и угловые ускорения его звеньев.

Ускорение точки А, вращающейся с постоянной скоростью вокруг точки O_1 , направлено по звену $O_1 A$ от точки А к точке O_1 и по модулю равна:

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{O_1 A} = 2^2 \cdot 0,02 = 0,08 \text{ м/с}^2.$$

Для построения ускорений выбираем масштаб скоростей:

$$\mu_a = \frac{a_A}{\pi a} = \frac{0,08}{80} = 0,001 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$$

Составим векторное уравнение сложения ускорений при плоскопараллельном движении звена АВ:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^{\tau},$$

где a_B – ускорение точки В; a_B – нормальное ускорение точки В, направленное параллельно звену AO_1 от точки А к точке O_1 ; a_{BA}^n – нормальное ускорение точки В во вращении звена АВ относительно точки А, по модулю равное $a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB} = 0,43^2 \cdot 0,07 = 0,013 \text{ м/с}^2$ и направленное параллельно звену АВ от точки В к точке А; a_{BA}^{τ} – касательное ускорение точки В во вращении звена АВ относительно точки А, по модулю неизвестно и направлено перпендикулярно звену АВ.

Проведем построения (рис.7.3). От полюса плана « π » ускорений откладываем отрезок (πb), изображающий ускорение a_B . Далее от точки « b » откладываем отрезок (an_1), изображающий ускорение a_{BA}^n , длиной $a_{n_1} = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a} = \frac{0,013}{0,001} = 13 \text{ мм}$ и направленный параллельно звену СВ от точки С к точке В; через точку n_1 проводим направление касательного ускорения a_{CB}^t – линию перпендикулярную АВ до пересечения с линией действия вектора ускорения a_B . Соединим полюс π с точкой « b » и получим отрезок (πb), соответствующий ускорению a_B .

Вектор ускорения a_C находим по правилу подобия.

$$\frac{l_{AB}}{l_{AC}} = \frac{ab}{ac}.$$

Численно найденные ускорения равны:

$$\begin{aligned} a_B &= (\pi b) \mu_a = 52,3 \cdot 0,001 = 0,052 \text{ м/с}^2; \\ a_{BA}^t &= (n_1 b) \mu_a = 55,2 \cdot 0,001 = 0,055 \text{ м/с}^2; \\ a_C &= (\pi c) \mu_a = 61,5 \cdot 0,001 = 0,061 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Угловое ускорение звена АВ механизма находим по формуле:

$$\varepsilon = \frac{a_{BA}^t}{l_{AB}} = \frac{0,055}{0,07} = 0,79 \text{ с}^{-2}.$$

Направление углового ускорения звена АВ определяется вектором касательного ускорения, входящего в формулу по определению его численное значение.

Ответ: $V_B = 0,037 \text{ м/с}$, $V_C = 0,036 \text{ м/с}$, $a_B = 0,052 \text{ м/с}^2$, $a_C = 0,061 \text{ м/с}^2$,
 $\omega_2 = 0,43 \text{ с}^{-1}$, $\varepsilon = 0,79 \text{ с}^{-2}$.

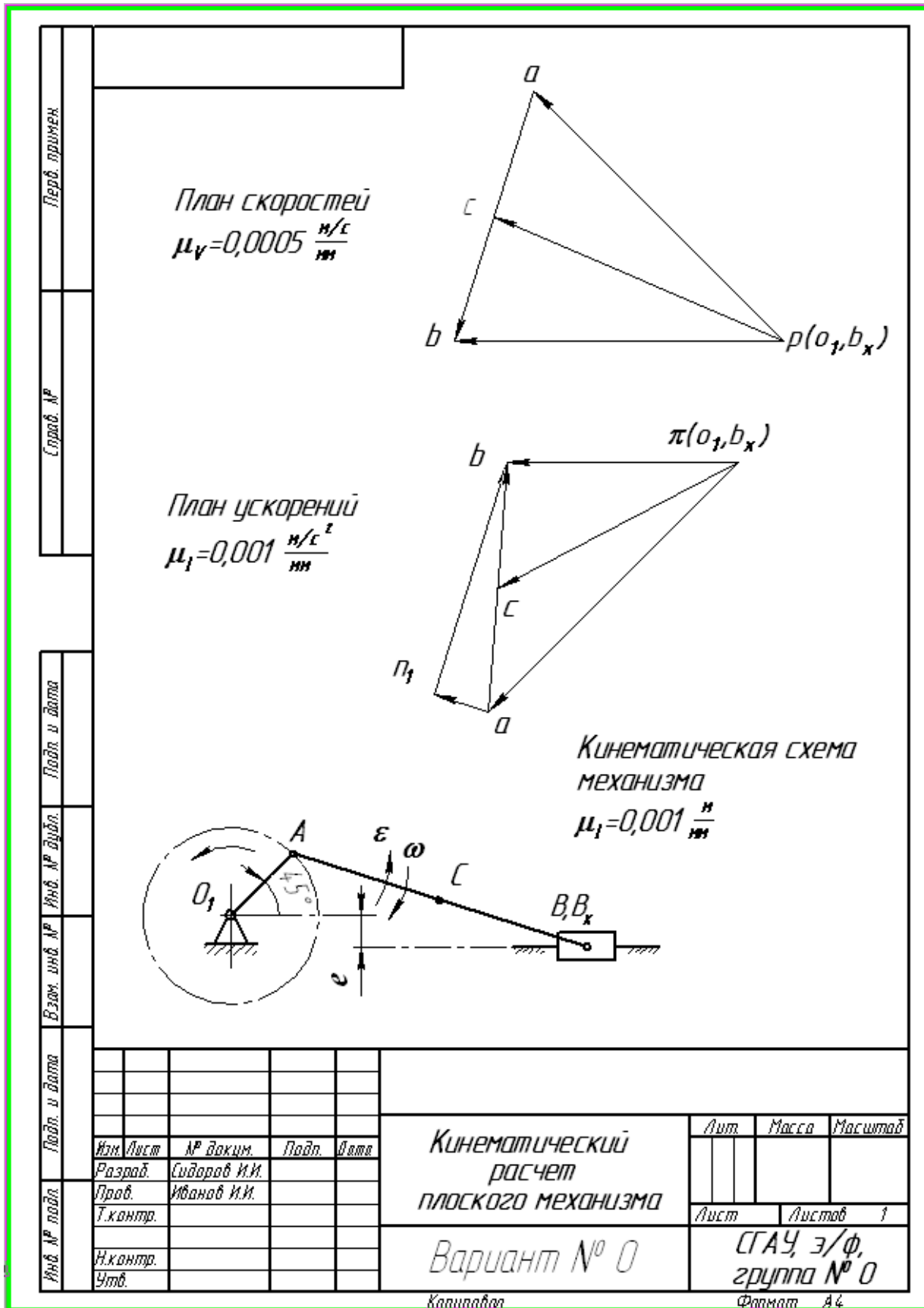


Рис.7.3.

3.6.Задание №6. Сложное движение материальной точки.

Прямоугольная пластина (или круглая пластина радиуса $R=60$ см (рис.8.5-8.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = f_1(t)$, заданному по табл.9. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунках дуговой стрелкой. На рис.8.0; 8.1; 8.2; 8.5; 8.6 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O (пластина вращается в своей плоскости); на рис.8.3; 8.4; 8.7; 8.8; 8.9 ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой BD (рис.8.0 - 8.4) или по окружности радиуса R (рис.8.5 - 8.9) движется точка M ; закон ее относительного движения, т.е. зависимость $S = f_2(t)$ (S выражено в сантиметрах, t - в секундах), задан в таблице отдельно для рис.8.0 - 8.4 и для рис.8.5 - 8.9; там же даны размеры b и l . На рисунках точка M показана в положении, при котором $S = AM > 0$ (при $S < 0$ точка M находится по другую сторону от точки A).

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t = t_1$ с. Необходимые данные приведены в таблице 9.

Таблица 9

Номер условия	Для всех рисунков $\varphi = f_1(t)$	Для рис.8.0 – 8.4		Для рис.8.5 – 8.9	
		$b, \text{ см}$	$S = f_2(t)$	l	$S = f_2(t)$
0	$4(t^2 - t)$	12	$50(3t - t^2) - 64$	R	$\pi/3[R(4t^2 - 2t^3)]$
1	$3t^2 - 8t$	16	$40(3t^2 - t^4) - 32$	$4R/3$	$\pi/2[R(2t^2 - t^3)]$
2	$6t^3 - 12t^2$	10	$80(t^2 - t) + 40$	R	$\pi/3[R(2t^2 - 1)]$
3	$t^2 - 2t^3$	16	$60(t^4 - 3t^2) + 56$	R	$\pi/6[R(3t - t^2)]$
4	$10t^2 - 5t^3$	8	$80(2t^2 - t^3) - 48$	R	$\pi/3[R(t^3 - 2t)]$
5	$2(t^2 - t)$	20	$60(t^3 - 2t^2)$	R	$\pi/3[R(t^3 - 2t)]$
6	$5t - 4t^2$	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	$3R/4$	$\pi/2[R(t^3 - 2t^2)]$
7	$15t - 3t^3$	8	$60(t - t^3) + 24$	R	$\pi/6[R(t - 5t^2)]$
8	$2t^3 - 11t$	10	$50(5t^3 - t) - 30$	R	$\pi/3[R(3t^2 - t)]$
9	$6t^2 - 3t^3$	20	$40(t - 2t^3) - 40$	$4R/3$	$\pi/2[R(t - 2t^2)]$

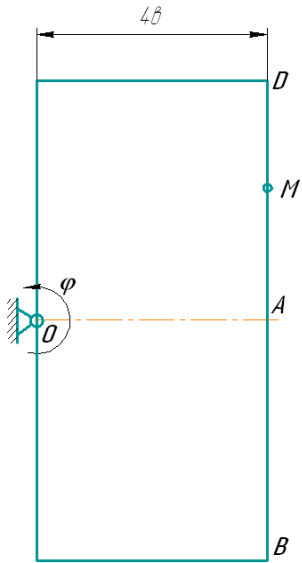


Рис.8.0

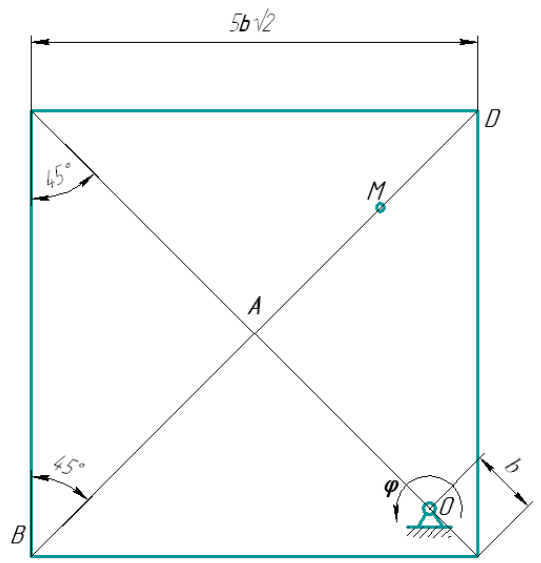


Рис.8.1

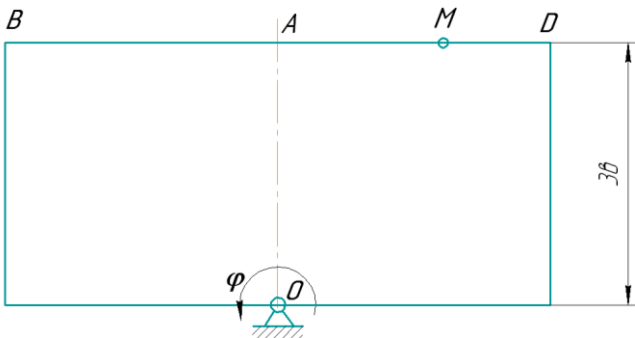


Рис.8.2

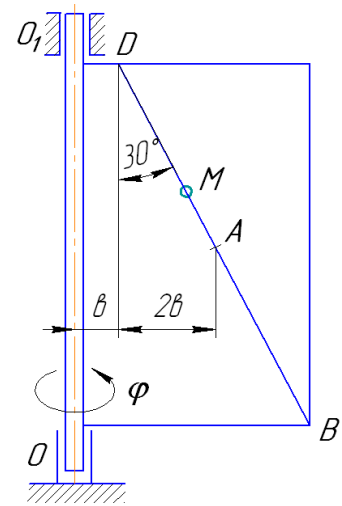


Рис.8.3

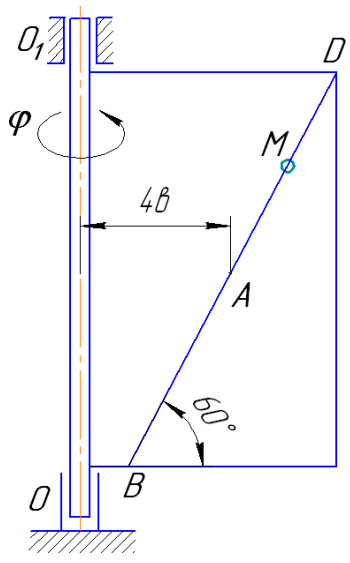


Рис.8.4

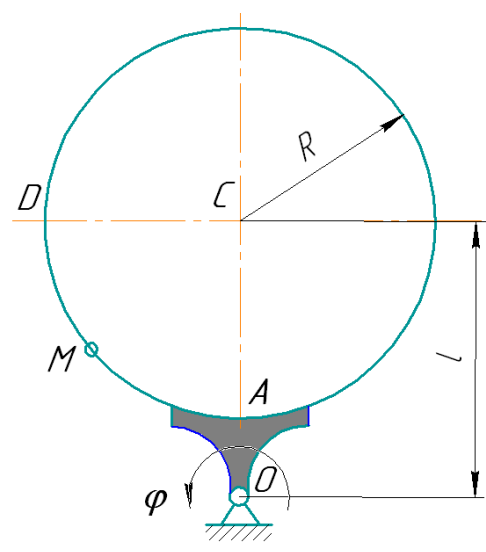


Рис.8.5

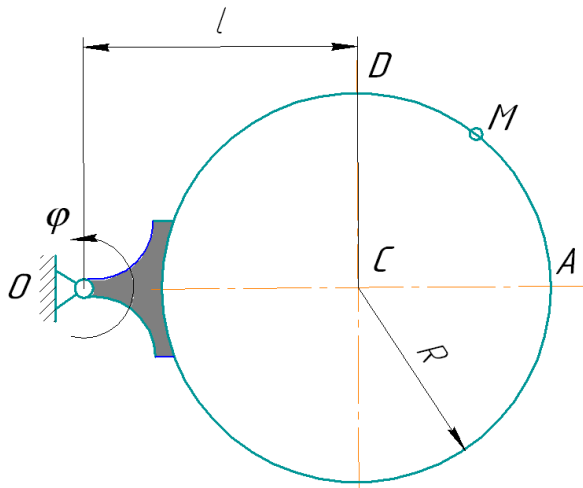


Рис.8.6

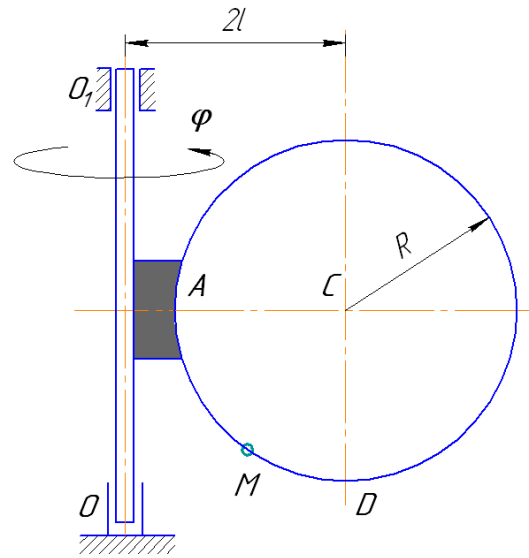


Рис.8.7

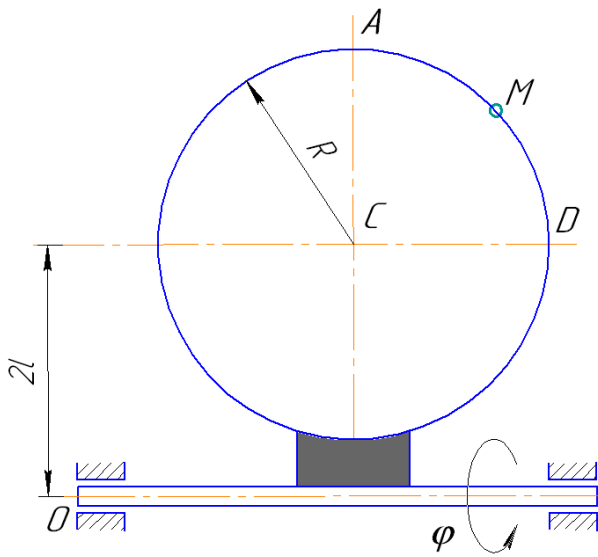


Рис.8.8

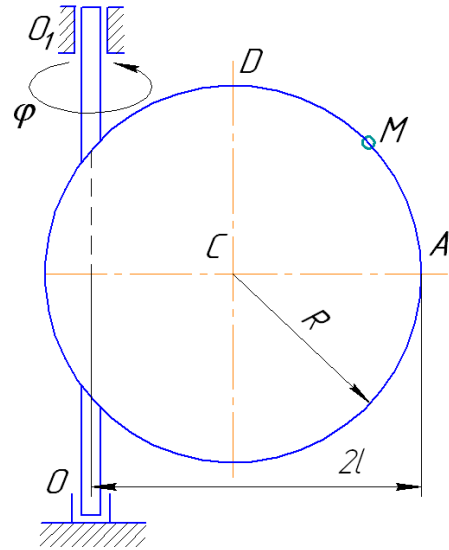


Рис.8.9

Пример выполнения задания №6.

Шар радиуса R (рис. 8.10,а) вращается вокруг своего диаметра AB по закону $\varphi=f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. 8.10,а дуговой стрелкой). По дуге большого круга («меридиану») ADB движется точка M по закону $s=AM=f_2(t)$; положительное направление отсчета s от A к D .

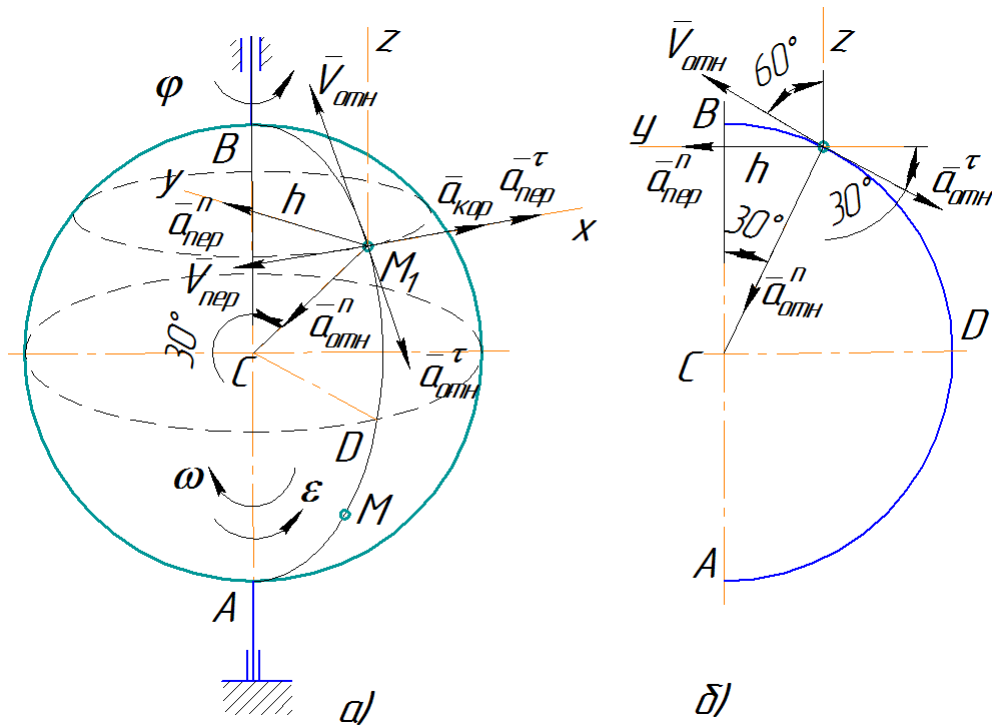


Рис.8.10

Дано: $R=0,5\text{м}$, $\varphi = 2t^3 - 4t^2$, $s=(\pi R/6)\cdot(7t-2t^2)$ (φ - в радианах, s - в метрах, t — в секундах). Определить: $V_{a\bar{o}}$ и $a_{a\bar{o}}$ в момент времени $t_1 = 1\text{с}$.

Решение.

Рассмотрим движение точки M как сложное, считая ее движение по дуге ADB относительным (AB —относительная траектория точки), а вращение шара — переносным движением. Тогда абсолютная скорость $V_{a\bar{o}}$ и абсолютное ускорение $a_{a\bar{o}}$ точки найдутся по формулам:

$$\bar{V}_{a\bar{o}} = \bar{V}_{om} + \bar{V}_{пер}, \quad \bar{a}_{a\bar{o}} = \bar{a}_{om} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}, \quad (1)$$

где, в свою очередь, $\bar{a}_{om} = \bar{a}_{om}^{\tau} + \bar{a}_{om}^n$, $\bar{a}_{пер} = \bar{a}_{пер}^{\tau} + \bar{a}_{пер}^n$.

Определим все характеристики относительного и переносного движений.

1. Относительное движение. Это движение происходит по закону

$$s=AM=(\pi R/6)\cdot(7t-2t^2). \quad (2)$$

Первоначально установим, где будет находиться точка M на дуге ADB в момент времени t_1 . Принимаем в уравнении (2) $t=1\text{с}$, получим $s_1=5\cdot\pi R/6$. Тогда $\angle ACM = s_1/R = 5\pi/6 = 150^\circ$ или $\angle BCM = 30^\circ$. Изображаем на рис.8.10,а точку в положении, определяемом этим углом (точка M_1).

Теперь находим числовые значения V_{om} и a_{om} :

$$V_{om} = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi R}{6}(7-4t); \quad a_{om}^{\tau} = \frac{dV_{om}}{dt} = -\frac{2}{3}\pi R; \quad a_{om}^n = \frac{V_{om}^2}{\rho_{om}} = \frac{V_{om}^2}{R},$$

где ρ_{om} - радиус кривизны относительной траектории, т. е. дуги ADB . Для момента времени $t_1 = 1$ с, учитывая, что $R = 0,5$ м, получим

$$V_{om} = \frac{\pi R}{6} \cdot 3 = \frac{\pi}{4} \text{ м / с}; \quad a_{om}^{\tau} = -\frac{\pi}{3} \text{ м / с}^2; \quad a_{om}^n = \frac{\pi^2}{8} \text{ м / с}^2. \quad (3)$$

Знаки показывают, что вектор V_{om} направлен в сторону положительного отсчета расстояния s , а вектор a_{om}^{τ} - в противоположную сторону; вектор a_{om}^n направлен к центру C дуги ADB . Изображаем все эти векторы на рис.8.10,а. Для наглядности приведен рис. 8.10,б, где дуга ADB совмещена с плоскостью чертежа.

2. Переносное движение. Это вращение шара по закону $\varphi = 2t^3 - 4t^2$. Найдем угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения:

$$\omega = \dot{\varphi} = 6t^2 - 8t, \quad \varepsilon = \dot{\omega} = 12t - 8 \text{ и при } t_1 = 1 \text{ с}$$

$$\omega = -2 \text{ с}^{-1}; \quad \varepsilon = 4 \text{ с}^{-2}. \quad (4)$$

Знаки указывают, что при $t_1 = 1$ с направление ε совпадает с направлением положительного отсчета угла φ , а направление ω ему противоположно; покажем это на рис.8.10,а соответствующими дугowymi стрелками.

Для определения V_{nep} и a_{nep} найдём расстояние h точки M_1 от оси вращения. Получаем $h = R \cdot \sin 30^\circ = 0,25$ м. Тогда в момент времени $t_1 = 1$ с, учитывая равенства (4), получим:

$$V_{nep} = |\omega| \cdot h = 0,5 \text{ м/с}, \quad a_{nep}^{\tau} = \varepsilon \cdot h = 1 \text{ м/с}^2, \quad a_{nep}^n = \omega^2 \cdot h = 1 \text{ м/с}^2. \quad (5)$$

Изображаем на рис.8.10,а векторы V_{nep} и a_{nep}^{τ} с учетом направлений ω и ε , вектор a_{nep}^n направлен к оси вращения.

3. Определим кориолисово ускорение. Так как угол между вектором V_{om} и осью вращения (вектором ω) равен 60° , то численно ускорение $a_{кор}$ в момент времени $t_1 = 1$ с равно:

$$a_{кор} = 2|V_{om}| \cdot |\omega| \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2,72 \text{ м / с}^2. \quad (6)$$

Направление $a_{кор}$ найдем, спроектировав вектор V_{om} на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена так же, как вектор a_{nep}^{τ}), и повернув затем эту проекцию в сторону ω , т. е. по ходу часовой стрелки, на 90° . Изобразим вектор $a_{кор}$ на рис.8.10,а.

4. Определим $V_{аб}$. Так как векторы V_{om} и V_{nep} взаимно перпендикулярны (рис.8.10,а), то в момент времени $t_1 = 1$ с

$$V_{аб} = \sqrt{V_{om}^2 + V_{nep}^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + (0,5)^2} = 0,93 \text{ м / с}.$$

5. Находим $a_{аб}$. По теореме о сложении ускорений

$$\bar{a}_{аб} = \bar{a}_{om}^{\tau} + \bar{a}_{om}^n + \bar{a}_{nep}^{\tau} + \bar{a}_{nep}^n + \bar{a}_{кор}. \quad (7)$$

Для определения $a_{a\bar{b}}$ проведем координатные оси $M_I x y z$ (рис.8.10,а) и вычислим проекции вектора $a_{a\bar{b}}$ на эти оси. Учтем при этом, что векторы a_{nep}^{τ} и a_{kop} лежат на проведенной оси x , а векторы a_{om}^{τ} , a_{om}^n и a_{nep}^n расположены в плоскости дуги ADB , т. е. в плоскости $M_I y z$ (рис. 8.10,б). Тогда, проектируя обе части равенства (7) на координатные оси и учитывая одновременно равенства (3), (5), (6), получим для момента времени $t_I=1$ с:

$$a_{a\bar{b}.x} = a_{nep}^{\tau} + a_{kop} = 1 + 2,72 = 3,72 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{a\bar{b}.y} = a_{nep}^n + a_{om}^n \cdot \cos 60^\circ - |a_{om}^{\tau}| \cos 30^\circ = 1 + \pi^2/16 - \pi\sqrt{3}/6 = 0,71 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{a\bar{b}.z} = -|a_{om}^{\tau}| \cos 60^\circ - a_{om}^n \cdot \cos 30^\circ = -\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi^2 \sqrt{3}}{16}\right) = -1,59 \text{ м/с}^2.$$

Отсюда находим значение $a_{a\bar{b}}$ в момент времени $t_I=1$ с г:

$$a_{a\bar{b}} = \sqrt{a_{a\bar{b}.x}^2 + a_{a\bar{b}.y}^2 + a_{a\bar{b}.z}^2} = 4,1 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $V_{a\bar{b}}=0,93 \text{ м/с}$; $a_{a\bar{b}}=4,1 \text{ м/с}^2$.

3.7. Задания №7. Общие теоремы динамики точки.

Шарик, принимаемый за материальную точку, движется из положения А внутри трубки, ось которой расположена в вертикальной плоскости. Найти скорость шарика в положениях В, С и давление шарика на стенку трубки в положении С. Трением на криволинейных участках траектории пренебречь. В вариантах 0, 1, 3, 6, 7 шарик, пройдя путь h , отделяется от пружины.

Необходимые для решения данные приведены в таблице 10.

В задании приняты следующие обозначения: m - масса шарика; V_A - начальная скорость шарика; τ - время движения шарика на участке AB (в вариантах 6-8, 24-26) или на участке BD (в вариантах 1-5, 9-23, 27-29); f - коэффициент трения скольжения шарика по стенке трубки; h_0 - начальная деформация пружины; h - наибольшее сжатие пружины; c - коэффициент жесткости пружины.

ПРИМЕЧАНИЕ: номер рисунка соответствующий варианту задается по номеру условия в таблице 10.

Таблица 10

Номер условия-	m , кг	V_A , м/с	τ , с	R , м	f	α	β	h_0 , см	c , Н/см	Определить	Номер рисунка
						град.					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0,4	0	2	0,2	0,15	30°	-	10	10	V_D	9.0
1	0,6	0	2	0,5	0,15	45°	-	20	14	V_D	
2	0,8	0	2	0,8	0,15	30°	-	14	12	V_D	
3	0,4	5	1	1	0,1	30°	-	50	5	V_D	9.1
4	0,2	6	1,5	1,4	0,1	30°	-	45	7	V_D	
5	0,3	7	1,2	1,1	0,1	45°	-	40	6	V_D	
6	0,2	1	0,5	1,5	0,15	30°	60°	0	4	h	9.2
7	0,4	4	0,4	1,3	0,15	30°	60°	0	5	h	
8	0,3	3	0,3	1,4	0,15	45°	60°	0	3	h	
9	0,4	4	0,1	0,5	0,1	30°	60°	0,2	0,2	V_D	9.3
10	0,2	3	0,2	0,5	0,1	30°	60°	0,1	0,2	V_D	
11	0,6	6	0,1	0,5	0,1	45°	60°	0,3	0,4	V_D	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12	0,2	6	1	1	0,3	45°	-	-	3	V_D, h	5.4
13	0,4	8	2	1	0,2	45°	-	-	4	V_D, h	
14	0,3	7	1	1	0,4	30°	-	-	5	V_D, h	
15	0,4	5	0,4	2	0,2	30°	60°	-	-	V_D	9.5
16	0,3	4	0,5	2	0,2	45°	45°	-	-	V_D	
17	0,5	6	0,3	2	0,2	30°	60°	-	-	V_D	
18	0,3	0	0,1	1	0,1	30°	60°	50	10	V_D	9.6
19	0,4	0	0,1	1	0,3	60°	30°	60	12	V_D	
20	0,2	0	0,2	1	0,2	45°	45°	70	14	V_D	
21	0,2	0	0,1	1	0,2	30°	-	40	1	V_D	9.7
22	0,4	0	0,1	2	0,3	45°	-	50	2	V_D	
23	0,5	0	0,1	3	0,4	30°	-	60	3	V_D	
24	0,2	10	1	0,5	0,1	60°	-	0	1,2	h	9.8
25	0,1	8	2	0,3	0,2	30°	-	0	1,1	h	
26	0,3	14	1	0,6	0,1	45°	-	0	1,3	h	
27	0,4	1	0,2	0,2	0,4	45°	-	0	1,1	V_D, h	9.9
28	0,6	4	0,2	0,4	0,3	30°	-	0	1,3	V_D, h	
29	0,5	3	0,3	0,3	0,2	60°	-	0	1,2	V_D, h	

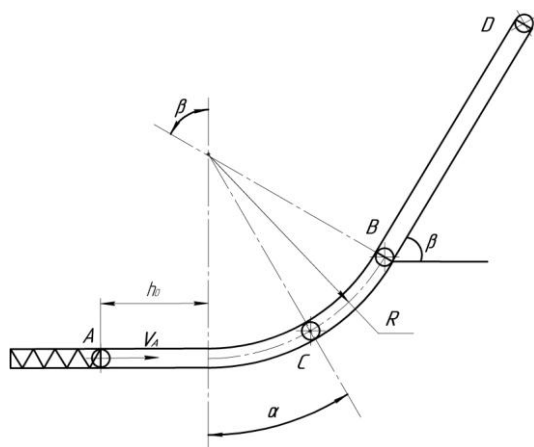


Рис.8.0

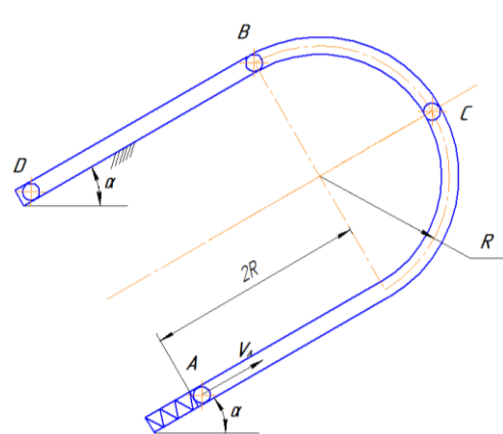


Рис.8.1

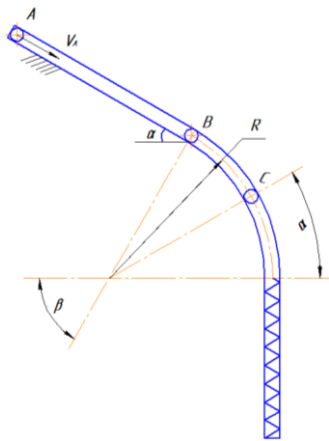


Рис.8.2

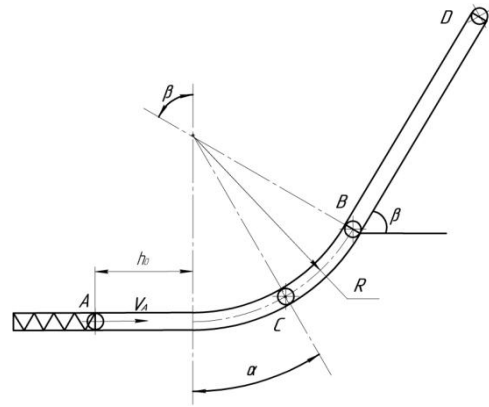


Рис.8.3

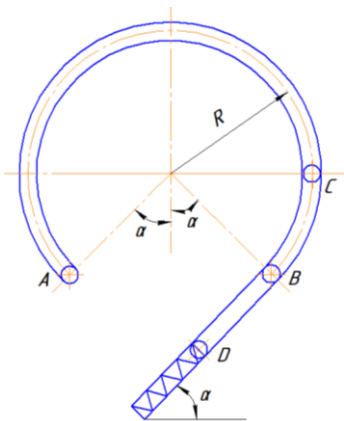


Рис.8.4

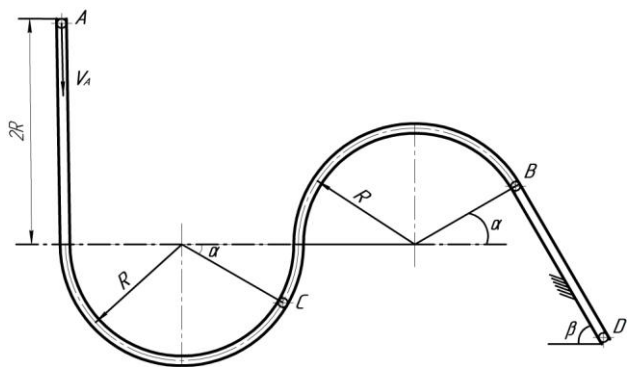


Рис.8.5

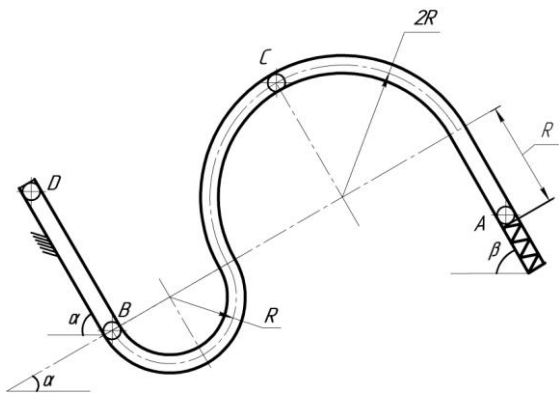


Рис.8.6

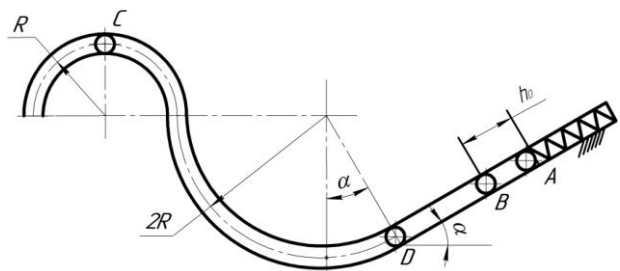


Рис.8.7

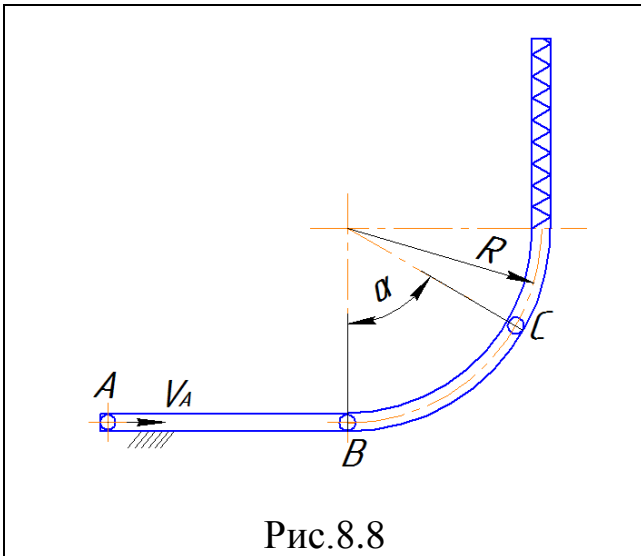


Рис.8.8

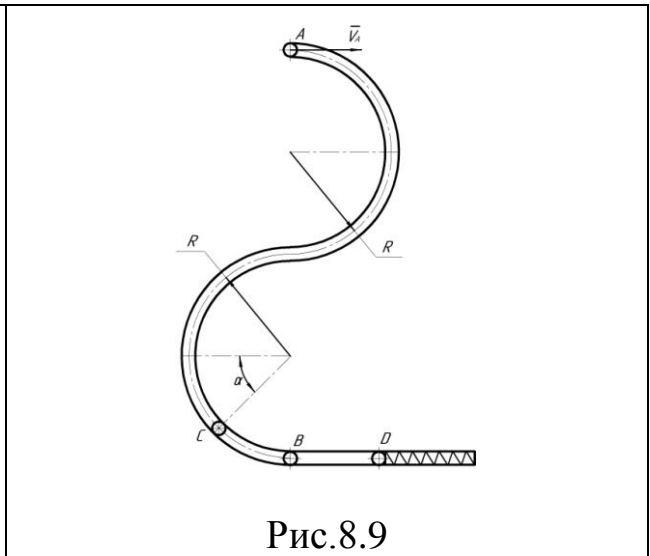


Рис.8.9

Пример выполнения задания №7.

Дано: $m = 0,5 \text{ кг}$; $V_A = 0,8 \text{ м/с}$;

$\tau = 0,1 \text{ с}$ (время движения на участке BD);

$R = 0,2 \text{ м}$; $f = 0,1$; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$;

$h_0 = 0$; $c = 10 \text{ Н/см} = 1000 \text{ Н/м}$.

Определить V_B , V_C , N_C , V_D , h .

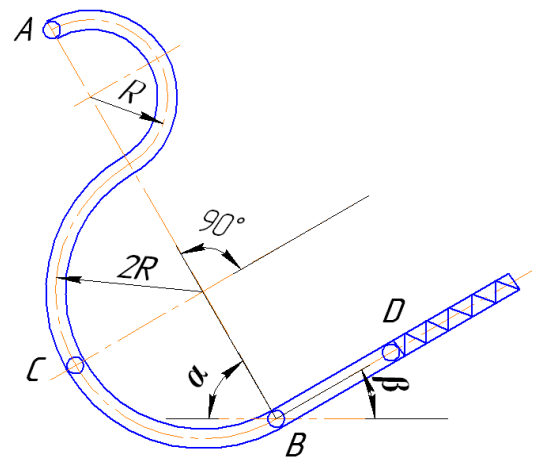


Рис.9.10.

Решение.

1. Для определения V_B и V_C применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки. Движение шарика на участках AC и AB траектории (рис.9.11) происходит под действием силы тяжести G (силы трения на криволинейных участках не учитываем):

$$\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = \sum A_k, \quad (1)$$

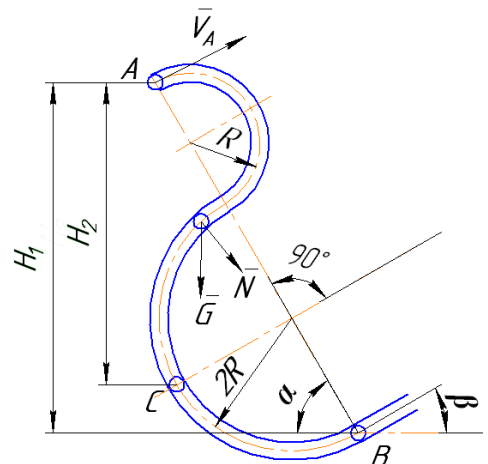


Рис.9.11.

Где $\sum A_k = G \cdot H_1 = mg \cdot AB \cdot \sin \alpha = mg \cdot 6R \cdot \sin \alpha$.

Преобразуем выражение (1): $V_B^2 - V_A^2 = 2 \cdot mg \cdot 6R \cdot \sin \alpha$. (2)

Подставим численные значения величин входящие в формулу (2) и найдем V_B :

$$V_B = 4,59 \text{ м/с.}$$

Аналогично найдем скорость шарика в положении С (V_C).

$$\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = \sum A_k = G \cdot H_2 = mg (4R \cdot \sin \alpha + 2R \cdot \cos \alpha);$$

$$V_C^2 - V_A^2 = 4 \cdot g \cdot R (2 \sin \alpha + \cos \alpha);$$

$$V_C = 4,26 \text{ м/с.}$$

2. Определяем давление шарика на стенку канала в положении С.

Для этого используем принцип Даламбера для материальной точки, в соответствии с которым геометрическая сумма сил, приложенных к точке, и силы инерции этой точки равна нулю:

$$\vec{G} + \vec{N}_C^1 + \vec{\Phi} = 0. \quad (3)$$

Силу инерции материальной точки ($\vec{\Phi}$) разложим на нормальную и касательную составляющие:

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_n + \vec{\Phi}_\tau.$$

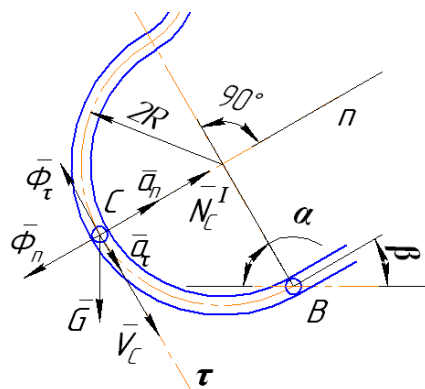


Рис.9.12.

3. Составим уравнение равновесия сил приложенных к шарикун в положении С в проекции на ось х:

$$N_C^1 - G \cdot \cos 60^\circ - \Phi_n = 0.$$

Отсюда

$$N_C^1 = G \cdot \cos 60^\circ + \Phi_n = mg \cdot \cos 60^\circ + \frac{m \cdot V_C^2}{2R},$$

тогда

$$N_C^1 = 25,2 \text{ Н.}$$

Надо также иметь ввиду, что эту же реакцию можно определить с помощью естественного дифференциального уравнения движения:

$$\frac{mV_C^2}{2R} = \sum F_{kn}, \text{ или}$$

$$\frac{mV_C^2}{2R} = N_C^1 - G \cdot \cos 60^\circ.$$

Отсюда

$$N_c^1 = G \cdot \cos 60^\circ + \frac{m \cdot V_c^2}{2R}.$$

4. Скорость шарика в положении D найдем, применив на участке BD теорему об изменении количества движения материальной точки (рис.9.13):

$$mV_{Dx} - mV_{Bx} = \Sigma S_{kx}.$$

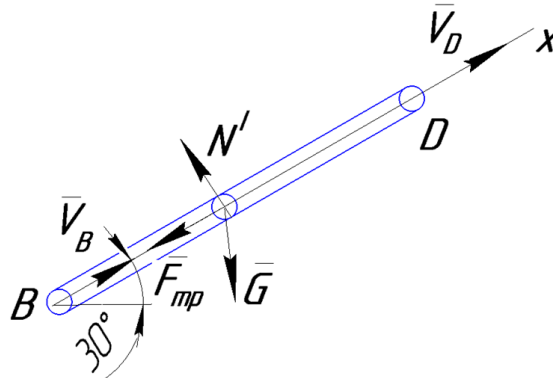


Рис.9.13.

При движения шарика на этом участке к нему приложены сила тяжести G , реакция стенки трубки N' и сила трения F_{mp} :

$$F_{mp} = f \cdot N' = f \cdot G \cdot \cos \beta.$$

Так как шарик движется по прямолинейному участку, то

$$V_{Dx} = V_D, \quad V_{Bx} = V_B,$$

$$\Sigma S_{kx} = -G \cdot \sin \beta \cdot t - F_{mp} \cdot t = -mg \cdot \sin \beta \cdot t - f \cdot mg \cdot \cos \beta \cdot t,$$

тогда

$$mV_{Dx} - mV_{Bx} = -mg \cdot \sin \beta \cdot t - f \cdot mg \cdot \cos \beta \cdot t,$$

получим

$$V_D = 4,01 \text{ м/с.}$$

4. Максимальное сжатия пружины h найдем при движении шарика на участке DE (рис.9.14.) с использованием теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$\frac{mV_E^2}{2} - \frac{mV_D^2}{2} = \Sigma A_k = -\frac{ch^2}{2} - G \cdot H_3 - F_{mp} \cdot h.$$

Учтём, что $V_E = 0$ и $H_3 = h \cdot \sin \beta$ и получим

$$\frac{ch^2}{2} + G (\sin \beta + f \cdot \cos \beta) h - \frac{mV_D^2}{2} = 0.$$

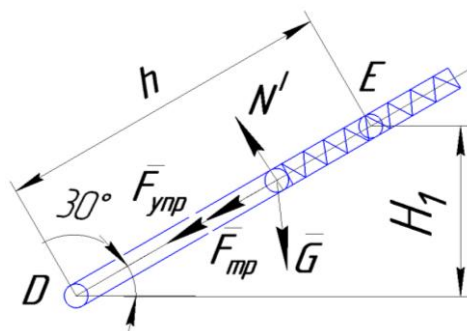


Рис.9.14.

Преобразуем формулу:

$$h^2 + h \cdot \frac{2G(\sin \beta + f \cdot \cos \beta)}{c} - \frac{mV_D^2}{c} = 0.$$

Решим полученное квадратное уравнение относительно h и получим

$$h = (-0,003 \pm 0,090) \text{ м.}$$

Принимаем в качестве искомой величины положительный корень квадратного уравнения, получим:

$$h = -0,003 + 0,090 = 0,087 \text{ м.}$$

Ответ: $V_B=4,59 \text{ м/с}$, $V_C=4,26 \text{ м/с}$, $N_c^1 = 25,2 \text{ Н}$,
 $V_D = 4,01 \text{ м/с}$, $h = 0,087 \text{ м}$.

3.8. Задания №8. Общие теоремы динамики механической системы.

Механическая система состоит из катков (или катка и подвижного блока) 1 и 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней $R_3 = 0,3 \text{ м}$, $r_3 = 0,1 \text{ м}$ и радиусом инерции относительно оси вращения $\rho_3 = 0,2 \text{ м}$, блока 4 радиуса $R_4 = 0,2 \text{ м}$ и грузов 5 и 6 (рис.10.0 - 10.9, табл.11); тела 1 и 2 считать сплошными однородными цилиндрами, а массу блока 4 – равномерно распределенной по ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость $f = 0,1$. Тела системы соединены друг с другом нитями, перекинутыми через блоки и намотанными на шкив 3 (или на шкив и один из катков); участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. К одному из тел прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c .

Под действием силы $F=f(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя; деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении на шкив 3 действует постоянный момент M сил сопротивления (от трения в подшипниках).

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение s станет равным $s_1 = 0,2$ м. Искомая величина указана в столбце «Найти» таблицы.

Все катки, включая и катки, обмотанные нитями, катятся по плоскостям без скольжения.

На всех рисунках не изображать груз 5 или 6, если $m_5 = 0$ или $m_6 = 0$, а также каток 1 на рис.10.0-10.4, если $m_1 = 0$, и каток 2 на рис.10.5-10.9, если $m_2 = 0$; все остальные тела должны изображаться и тогда, когда их масса равна нулю.

Таблица 11

Номер условия	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	$c, \text{ Н/м}$	$M, \text{ Н}\cdot\text{м}$	$F=f(s), \text{ Н}$	Найти
	К2									
0	2	0	4	0	6	0	180	1,2	$80(3+4s)$	ω_3
1	0	2	0	6	0	4	120	0,6	$20(6+5s)$	V_1
2	6	0	0	2	4	0	400	1,8	$60(4+s)$	V_2
3	0	4	6	0	0	2	240	0,3	$40(3+8s)$	ω_4
4	4	0	0	2	0	6	320	1,5	$50(5+2s)$	V_1
5	2	0	4	0	0	6	100	0,9	$30(4+3s)$	V_{C5}
6	0	4	0	6	2	0	160	2,4	$60(2+5s)$	ω_3
7	6	0	0	4	0	2	120	0,3	$80(1+4s)$	V_2
8	0	6	2	0	4	0	200	1,2	$20(8+3s)$	ω_4
9	0	2	0	4	6	0	100	0,6	$40(3+2s)$	V_{C5}

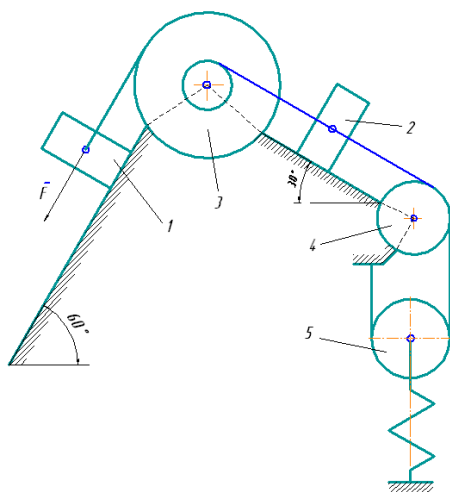


Рис.10.0

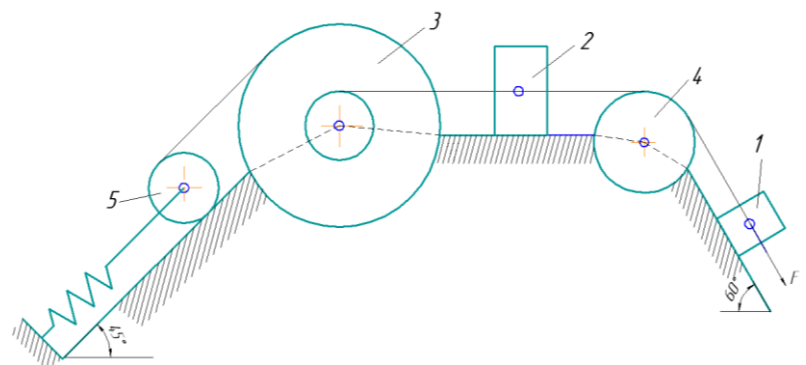


Рис.10.1

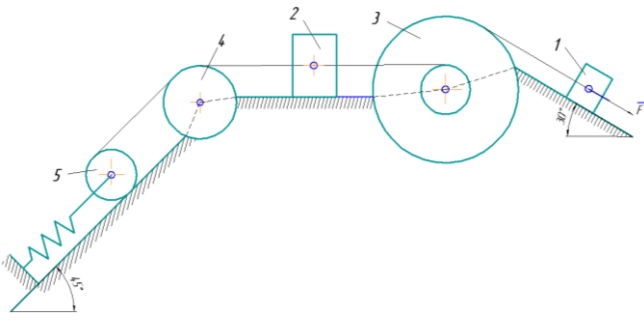


Рис.10.2

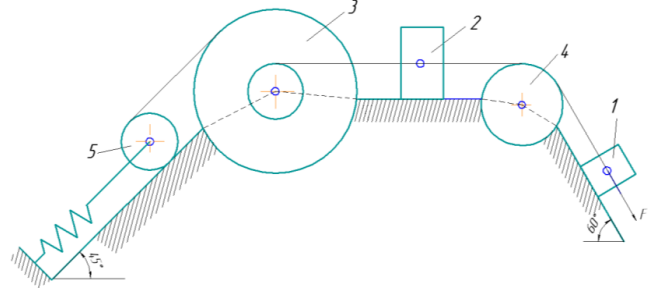


Рис.10.3

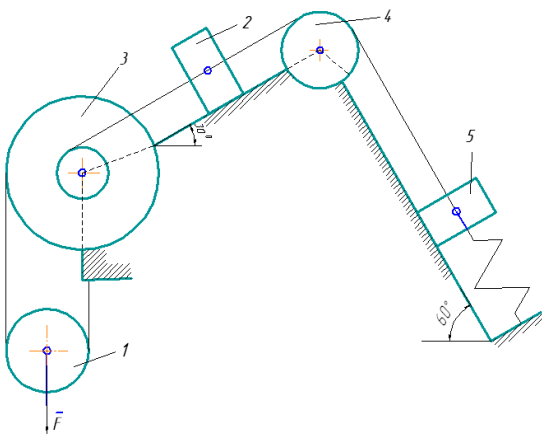


Рис.10.4

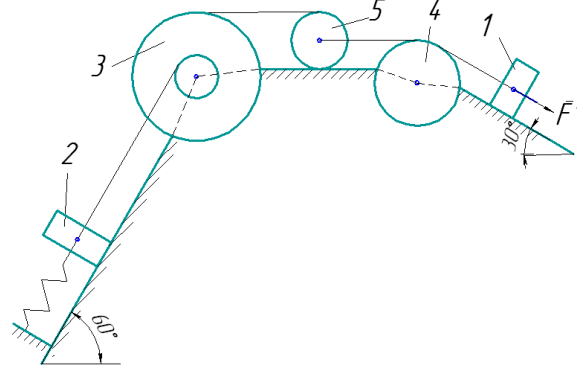


Рис.10.5

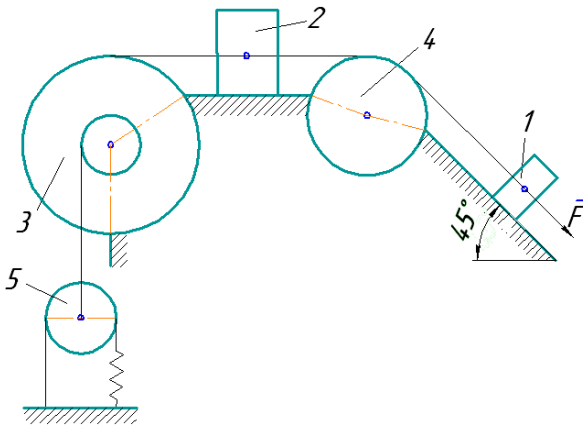


Рис.10.6

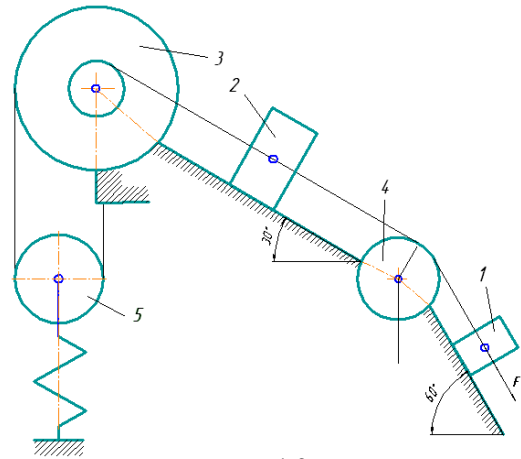


Рис.10.7

Дано: $m_1 = 8 \text{ кг}$, $m_2 = 0$, $m_3 = 4 \text{ кг}$, $m_4 = 0$, $m_5 = 10 \text{ кг}$, $R_3 = 0,3 \text{ м}$, $r_3 = 0,1 \text{ м}$,
 $\rho_3 = 0,2 \text{ м}$, $f = 0,1$, $c = 240 \text{ Н/м}$, $M = 0,6 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $F = 20(3+2s) \text{ Н}$, $s_1 = 0,2 \text{ м}$.
 Определить: ω_3 в тот момент времени, когда $s = s_1$.

Решение.

1. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из весоных тел 1, 3, 5 и невесоных тел 2, 4, соединенных нитями. Изобразим действующие на систему внешние силы: активные F , $F_{\text{упр}}$, P_1 , P_2 , P_3 , реакции N_1 , N_3 , N_4 , N_5 , натяжение нити S_2 , силы трения F_1^{mp} , F_5^{mp} и момент M (рис.10.10,а).

Для определения ω_3 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \Sigma A^e. \quad (1)$$

2. Определяем T_0 и T . Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_3 + T_5. \quad (2)$$

Учитывая, что тело 1 движется плоскопараллельно, тело 5 — поступательно, а тело 3 вращается вокруг неподвижной оси, получим

$$T_1 = \frac{m_1 V_{C_1}^2}{2} + \frac{I_{C_1} \omega_1^2}{2}; \quad T_3 = \frac{I_3 \omega_3^2}{2}; \quad T_5 = \frac{m_5 V_5^2}{2}. \quad (3)$$

Все входящие сюда скорости надо выразить через искомую ω_3 . Для этого предварительно заметим, что $V_{C_1} = V_5 = V_A$, где A — любая точка обода радиуса r_3 шкива 3, а точка K_1 — мгновенный центр скоростей катка 1, радиус которого обозначим r_1 . Тогда

$$V_{C_1} = V_5 = \omega_3 \cdot r_3; \quad \omega_1 = \frac{V_{C_1}}{K_1 C_1} = \frac{V_{C_1}}{r_1} = \frac{r_3}{r_1} \cdot \omega_3; \quad (4)$$

Кроме того, входящие в (3) моменты инерции имеют значения $I_{C_1} = 0,5 \cdot m_1 \cdot r_1^2$; $I_3 = m_3 \cdot \rho_3^2$. (5)

Подставив все величины (4) и (5) в равенства (3), а затем, используя равенство (2), получим окончательно

$$T = \left(\frac{3}{4} m_1 \cdot r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 \cdot r_3^2 \right) \omega_3^2. \quad (6)$$

3. Теперь найдем сумму работ всех действующих внешних сил при том перемещении, которое будет иметь система, когда точка C_1 пройдет путь s_1 . Введя обозначения: s_5 — перемещение груза 5 ($s_5 = s_1$), φ_3 — угол поворота шкива 3, λ_0 и λ_1 — начальное и конечное удлинения пружины, получим

$$A(\overline{F}) = \int_0^{s_1} 20(3 + 2s) ds = 20(3s_1 + s_1^2);$$

$$A(\overline{P}_1) = P_1 \cdot s_1 \cdot \sin 60^\circ; \quad A(\overline{F}_5^{mp}) = -F_5^{mp} \cdot s_5 = -f \cdot P_5 \cdot s_1;$$

$$A(\overline{M}) = -M \cdot \varphi_3; \quad A(\overline{F}_{ypp}) = \frac{c \cdot (\lambda_0^2 - \lambda_1^2)}{2}.$$

Работы остальных сил равны нулю, так как точки K_1 и K_2 , где приложены силы N_1 , F_1^{mp} и S_2 - мгновенные центры скоростей; точки, где приложены P_3 , N_3 и P_4 — неподвижны; а реакция N_5 перпендикулярна перемещению груза.

По условиям задачи $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 = s_E$, где s_E - перемещение точки C_2 (конца пружины). Величины s_E и φ_3 надо выразить через заданное перемещение s_1 . Для этого учтем, что зависимость между перемещениями здесь такая же, как и между соответствующими скоростями. Тогда, поскольку $\omega_3 = V_A/r_3 = V_{C1}/r_3$, а $\varphi_3 = s_1/r_3$.

Далее, из рис.10.10,б видно, что $V_D = V_B = \omega_3 \cdot R_3$, а так как точка K_2 является мгновенным центром скоростей для блока 2 (он как бы «катится» по участку нити K_2L), то $V_E = 0,5 V_D = 0,5 \cdot \omega_3 \cdot R_3$, следовательно, и $\lambda_1 = s_E = 0,5 \cdot \omega_3 \cdot R_3 = 0,5 \cdot s_1 \cdot R_3 / r_3$. При найденных значениях φ_3 и λ_1 для суммы всех вычисленных работ получим

$$\sum A_{\kappa}^e = 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 \cdot s_1 \cdot \sin 60^\circ - f \cdot P_5 \cdot s_1 - M \cdot \frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{8} \cdot \frac{R_3^2}{r_3^2} \cdot s_1^2. \quad (7)$$

Подставляя выражения (6) и (7) в уравнение (1) и учитывая, что $T_0=0$, приходим к равенству

$$\left(\frac{3}{4} m_1 \cdot r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 \cdot r_3^2 \right) \omega_3^2 =$$

$$= 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 \cdot s_1 \cdot \sin 60^\circ - f \cdot P_5 \cdot s_1 - M \cdot \frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{8} \cdot \frac{R_3^2}{r_3^2} \cdot s_1. \quad (8)$$

Из равенства (8), подставив в него числовые значения заданных величин, найдем искомую угловую скорость ω_3 .

Ответ: $\omega_3 = -8,1 \text{ с}^{-1}$.

3.9. Задание №9. Общее уравнение динамики.

Механическая система состоит из однородных ступенчатых шкивов 1 и 2, обмотанных нитями, грузов 3...6, прикрепленных к этим нитям, и невесомого блока (рис. 12.0-12.9, табл.12). Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары с моментом M , приложенной к одному из шкивов. Радиусы ступеней шкива 1 равны: $R_1 = 0,2$ м, $r_1 = 0,1$ м, а шкива 2 – $R_2 = 0,3$ м, $r_2 = 0,15$ м; их радиусы инерции относительно осей вращения равны $\rho_1 = 0,1$ м и $\rho_2 = 0,2$ м.

Пренебрегая трением, определить ускорение груза, имеющего больший вес; веса $G_1 \dots G_6$ шкивов и грузов заданы в таблице в ньютонах. Грузы, веса которых равны нулю, на чертеже не изображать (шкивы 1 и 2 изображать всегда, как части системы).

Таблица 12

Номер условия	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	$M, Н \cdot м$
	H						
0	10	0	20	30	40	0	0,9
1	0	40	0	10	20	30	1,2
2	20	30	40	0	10	0	0,6
3	0	20	10	30	0	40	1,8
4	30	0	20	0	40	10	1,2
5	0	10	30	40	20	0	0,9
6	40	0	0	20	30	10	1,8
7	10	20	0	40	0	30	0,6
8	0	40	10	0	30	20	0,9
9	30	0	40	20	10	0	1,2

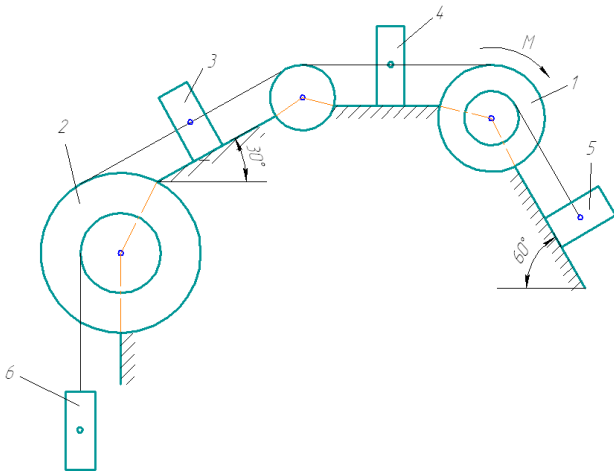


Рис.11.0

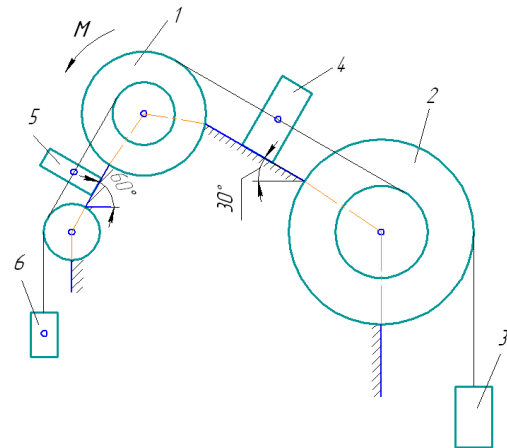


Рис.11.1

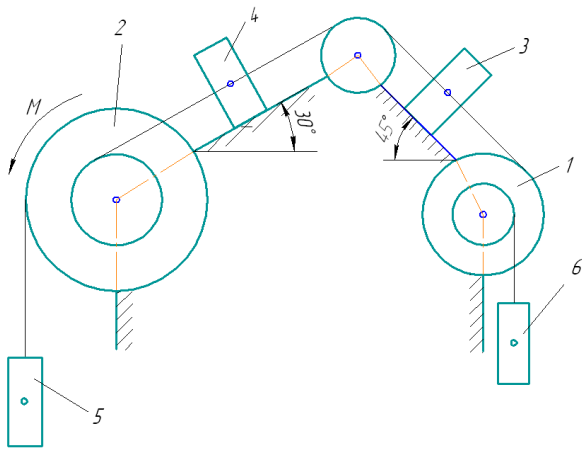


Рис.11.2

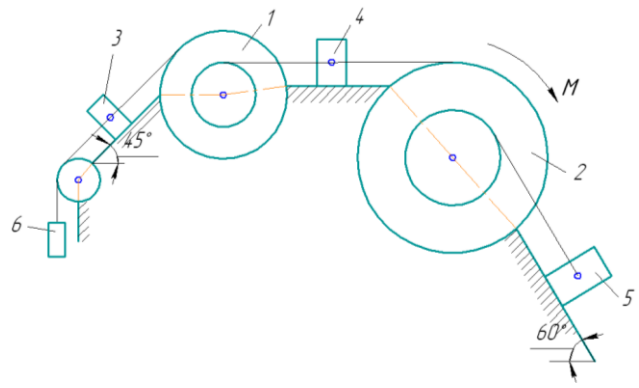


Рис.11.3

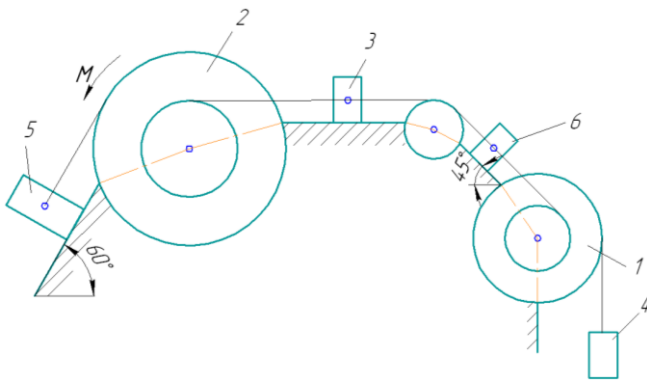


Рис.11.4

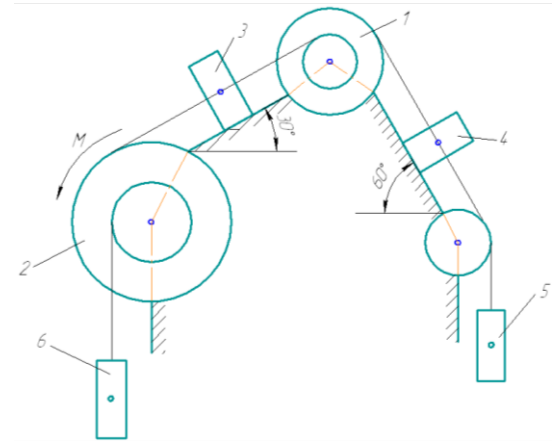


Рис.11.5

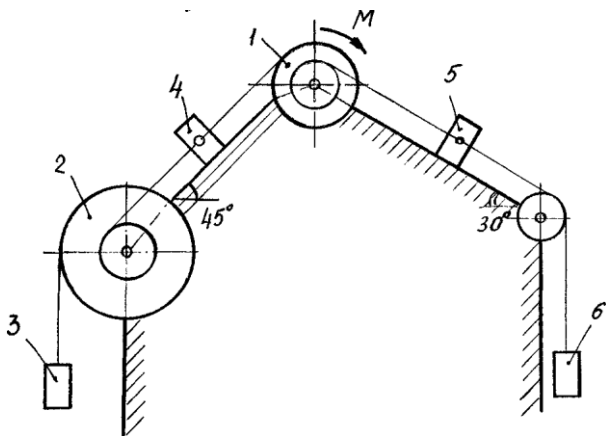


Рис.11.6

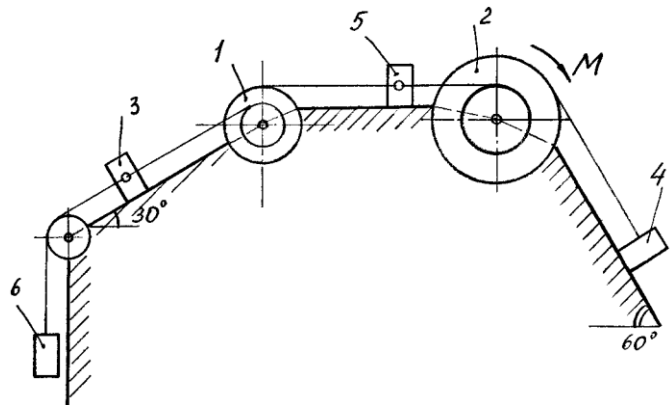


Рис.11.7

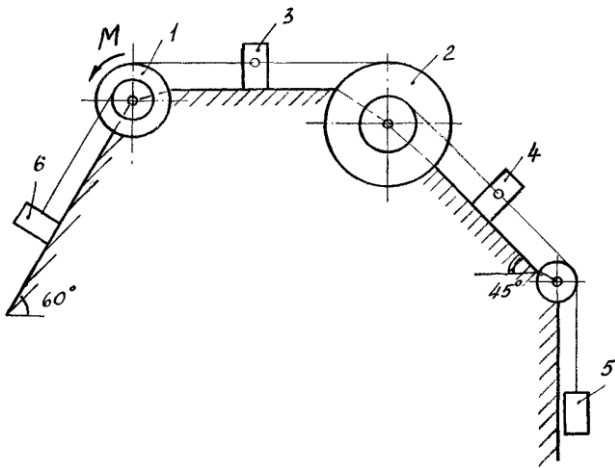


Рис.11.8

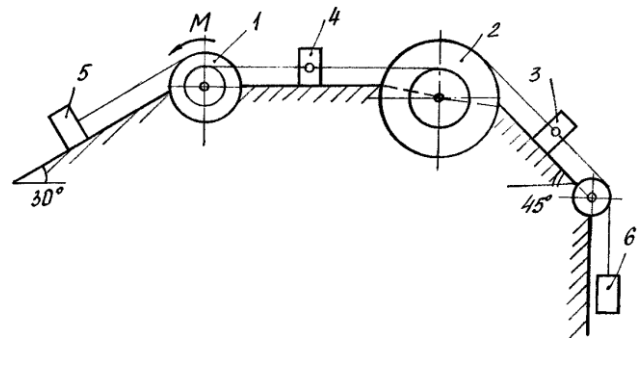


Рис.11.9

Пример выполнения задания №9.

Механическая система (рис. 11.10) состоит из обмотанных нитями блока 1 радиуса R_1 и ступенчатого шкива 2 (радиусы ступеней R_2 и r_2 , радиус инерции относительно оси вращения p_2), а также из грузов 3 и 4, прикрепленных к этим нитям. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом M , приложенной к блоку 1.

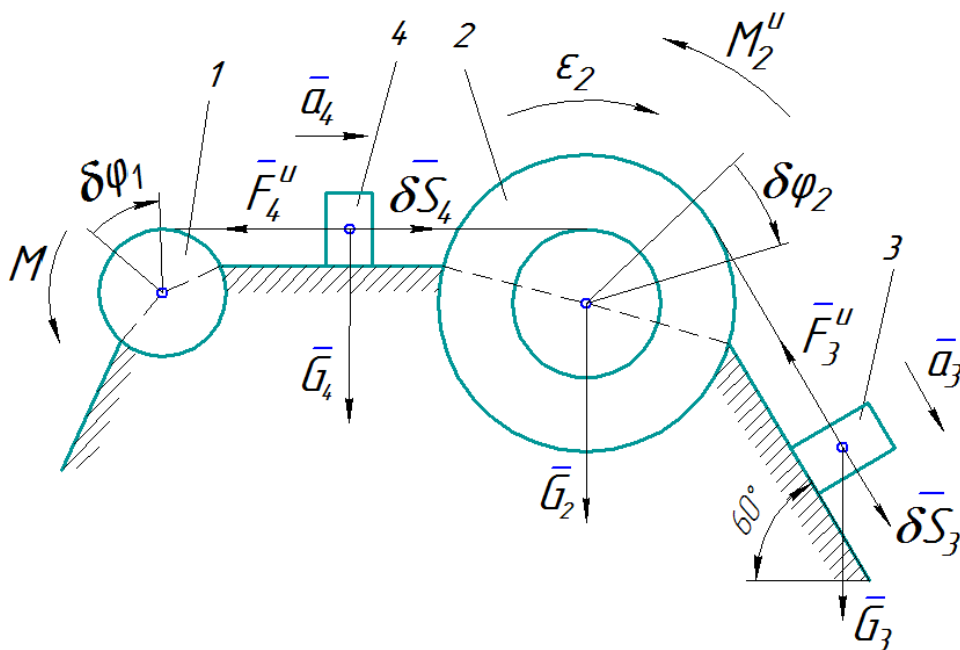


Рис.11.10

Дано: $P_1 = 0$, $P_2 = 30 \text{ Н}$, $P_3 = 40 \text{ Н}$, $P_4 = 20 \text{ Н}$, $M = 16 \text{ Нм}$, $R_1 = 0,2 \text{ м}$,
 $R_2 = 0,3 \text{ м}$, $r_2 = 0,15 \text{ м}$, $p_2 = 0,2 \text{ м}$.

Определить: ускорение груза 3, пренебрегая трением.

Решение.

1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из тел 1, 2, 3, 4, соединенных нитями. Система имеет одну степень свободы. Связи, наложенные на эту систему, идеальные.

Для определения a_3 применим общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A_{\kappa}^a + \sum \delta A_{\kappa}^u = 0, \quad (1)$$

где $\sum \delta A_{\kappa}^a$ - сумма элементарных работ активных сил; $\sum \delta A_{\kappa}^u$ - сумма элементарных работ сил инерции.

2. Изображаем на чертеже активные силы P_2, P_3, P_4 , и пару сил с моментом M . Задавшись направлением ускорения a_3 , изображаем на чертеже силы инерции F_3^u, F_4^u и пару сил инерции с моментом M_2^u , величины которых равны:

$$F_3^u = \frac{P_3}{g} a_3; \quad F_4^u = \frac{P_4}{g} a_4; \quad M_2^u = \frac{P_2}{g} \cdot \rho_2^2 \cdot \varepsilon_2; \quad (2)$$

3. Сообщая системе возможное перемещение и составляя уравнение (1), получим

$$(P_3 \cdot \sin 60^\circ - F_3^u) \delta s_3 - M_2^u \cdot \delta \varphi_2 - F_4^u \cdot \delta s_4 - M \cdot \delta \varphi_1 = 0. \quad (3)$$

Выразим все перемещение через $\delta \varphi_2$:

$$\delta \varphi_3 = R_2 \cdot \delta \varphi_2; \quad \delta s_4 = r_2 \cdot \delta \varphi_2; \quad \delta \varphi_1 = r_2 \cdot \delta \varphi_2 / R_1. \quad (4)$$

Подставив величины (2) и (4) в уравнение (3), приведем его к виду

$$\left[P_3 \left(\sin 60^\circ - \frac{a_3}{g} \right) R_2 - \frac{P_2}{g} \cdot \rho_2^2 \cdot \varepsilon_2 - \frac{P_4}{g} \cdot a_4 \cdot r_2 - M \cdot \frac{r_2}{R_1} \right] \delta \varphi_2 = 0. \quad (5)$$

Входящие сюда величины ε_2 и a_4 выразим через искомую величину a_3 :

$$\varepsilon_2 = a_3 / R_2; \quad a_4 = \varepsilon_2 \cdot r_2 = r_2 \cdot a_3 / R_2.$$

Затем, учтя, что $\delta \varphi_2 \neq 0$, приравняем нулю выражение, стоящее в (5) в квадратных скобках.

Из полученного в результате уравнения найдем

$$a_3 = \frac{P_3 \cdot R_2 \cdot \sin 60^\circ - M (r_2 / R_1)}{P_3 \cdot R_2 + P_2 \cdot \rho_2^2 / R_2 + P_4 (r_2^2 / R_2)} \cdot g.$$

Ответ: По результатам вычислений получили: $a_3 = -0,9 \text{ м/с}^2$. Знак указывает, что ускорение груза 3 и ускорение других тел направлены противоположно показанным на рис.11.10.

Литература

1. Лиханос В.А. Повышение эффективности преподавания дисциплины "Инженерная графика /В.А.Лиханос , А.В. Бобрышов, В.Ю. Гальков, И.А. Орлянская // В сборнике: Современные тенденции повышения качества образования. Сборник трудов по материалам научно-методической конференции СтГАУ. –Ставрополь: Агрус, 2016. - С. 133-137.

2. Бобрышов А.В. Использование компьютерных технологий в курсовом проектировании общепрофессиональных дисциплин / В сборнике: Современные тенденции повышения качества образования .Сборник трудов по материалам научно-методической конференции СтГАУ. – Ставрополь: Агрус, 2016. - . 33-36.

3. Бобрышов А.В. Влияние параметров гидромолоты на нагруженность деталей трансмиссии трактора / А.В. Бобрышов, Ю.В. Прохорская, В.А. Лиханос, В.А. Бобрышов // В сборнике: Актуальные проблемы научно-технического прогресса в АПК. –Ставрополь: Агрус, 2006. - С. 36-37.

4. Бобрышов А.В. Прогнозирование максимальных динамических нагрузок в трансмиссиях сельскохозяйственных агрегатов / А.В.Бобрышов, Ю.В. Прохорская, В.А. Бобрышов //В сборнике: Актуальные проблемы научно-технического прогресса в АПК Сборник научных статей по материалам IV Международной научно-практической конференции в рамках XI Международной агропромышленной выставки "Агроуниверсал-2009". –Ставрополь: Агрус,2009. - С. 5-6.

5. Бобрышов А.В. Расчет максимальных нагрузок в трансмиссии агрегатов с активными рабочими органами / А.В. Бобрышов, Ю.В. Прохорская, В.А. Лиханос // В сборнике: Актуальные проблемы научно-технического прогресса в АПК. Сборник научных статей по материалам V Международной научно-практической конференции в рамках XII Международной агропромышленной выставки "Агроуниверсал-2010". – Ставрополь: Агрус, 2010. - С. 23-26.

6. Фокин Б.П. Организация перемещения фронтальных дождевальными машинами при поливе / Б.П. Фокин, А.В. Бобрышов, В.А. Лиханос // Вестник АПК Ставрополья. 2014. № 3(15). - С. 57-60.

7. Фокин Б.П. Движение капель жидкости в воздушных струях / Б.П. Фокин, А.В. Бобрышов, Ю.В. Прохорская, В.А. Лиханос // Сельский механизатор. 2013. № 7. - С.14-15.

Содержание

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА	3
2. Содержание заданий, требования и порядок выполнения курсовой работы.....	4
3. Контрольные задания.....	5
3.1. Задание №1. Определение реакций опор твердого тела.....	5
3.2. Задание №2. Расчет плоской фермы.....	8
3.3. Задания №3. Определение реакций опор составной конструкции.....	13
3.4. Задание 4. Вращение тела вокруг неподвижной оси.....	18
3.5. Задания №5. Плоское движение твердого тела.....	25
3.6. Задание №6. Сложное движение материальной точки.....	32
3.7. Задания №7. Общие теоремы динамики точки.....	38
3.8. Задания №8. Общие теоремы динамики механической системы.....	44
3.9. Задание №9. Общее уравнение динамики.....	50
Литература.....	54

Учебное издание

Авторы:

Бобрышов Алексей Васильевич,
Капов Султан Нануович,
Орлянская Ирина Александровна
Лиханос Виктор Анатольевич,
Орлянский Александр Викторович

**ОСОБЕННОСТИ СТАТИЧЕСКОГО, КИНЕМАТИЧЕСКОГО И
ДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ И МЕХАНИЗМОВ**

Учебное пособие

Публикуется в авторской редакции.
Отпечатано с готового оригинала-макета факультета механизации
сельского хозяйства СтГАУ